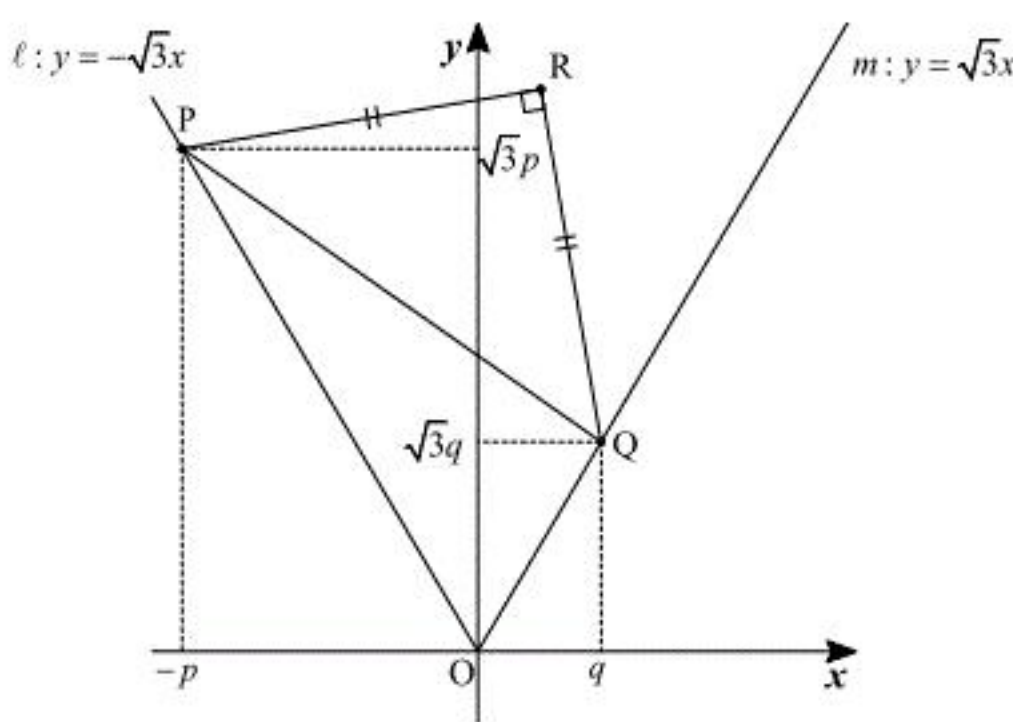


I

(1)



条件(*)より

$$\begin{aligned} PQ &= 2 \\ \Leftrightarrow PQ^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \{q - (-p)\}^2 + \{\sqrt{3}q - \sqrt{3}p\}^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (p+q)^2 + 3(p-q)^2 &= 4 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\therefore p^2 - pq + q^2 - 1 = 0$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p^2 - pq + q^2 - 1 = 0$$

(2)

点Pと点Qの中点を点Mとおくと、点Mの座標は $\left(\frac{-p+q}{2}, \frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{2}\right)$ となる。 $\triangle PQR$ がPQを斜辺とする直角二等辺三角形であることより、 $\overline{PM}$ と $\overline{MR}$ は垂直で、大きさが等しい。したがって、 $\overline{PM} = \left(\frac{p+q}{2}, \frac{\sqrt{3}q-\sqrt{3}p}{2}\right)$ であるから、

$$\overline{MR} = \left(-\frac{\sqrt{3}q-\sqrt{3}p}{2}, \frac{p+q}{2}\right) \text{ または } \overline{MR} = \left(\frac{\sqrt{3}q-\sqrt{3}p}{2}, -\frac{p+q}{2}\right)$$

である。ここで、点Rは直線PQの上側に存在するから、 $\overline{MR}$ のy成分は正である。則ち、

$$\overline{MR} = \left(-\frac{\sqrt{3}q-\sqrt{3}p}{2}, \frac{p+q}{2}\right) \text{ である。以上より、}$$

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \overline{OR} \\ &= \overline{OM} + \overline{MR} \\ &= \left(\frac{-p+q}{2}, \frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}q-\sqrt{3}p}{2}, \frac{p+q}{2}\right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{3}-1)(p-q)}{2}, \frac{(\sqrt{3}+1)(p+q)}{2}\right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (X, Y) = \left(\frac{(\sqrt{3}-1)(p-q)}{2}, \frac{(\sqrt{3}+1)(p+q)}{2}\right)$$

(3)

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \left(\frac{(\sqrt{3}-1)(p-q)}{2}, \frac{(\sqrt{3}+1)(p+q)}{2}\right) \\ \Leftrightarrow (p-q, p+q) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}X, \frac{2}{\sqrt{3}+1}Y\right) \end{aligned}$$

である。したがって、①より

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(p+q)^2 + \frac{3}{4}(p-q)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}Y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}X\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{X^2}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{(\sqrt{3}+1)^2} = 1$$

(4)

$$\begin{aligned} (p-q, p+q) &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}X, \frac{2}{\sqrt{3}+1}Y\right) \\ \Leftrightarrow (p-q, p+q) &= \left((\sqrt{3}+1)X, (\sqrt{3}-1)Y\right) \\ \Leftrightarrow (p, q) &= \left(\frac{(\sqrt{3}+1)X + (\sqrt{3}-1)Y}{2}, \frac{-(\sqrt{3}+1)X + (\sqrt{3}-1)Y}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} p &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}+1)X + (\sqrt{3}-1)Y}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow Y &\geq -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}X \quad \dots \textcircled{3} \\ q &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{3}+1)X + (\sqrt{3}-1)Y}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow Y &\geq \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}X \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。したがって、求める軌跡は②が表す曲線のうち、③と④が表す領域と共通の部分である。④が表す領域の境界線の方程式は

$$Y = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}X \quad \dots \textcircled{5}$$

である。ここで、②と⑤の共有点を求める。②、⑤より

$$\begin{aligned} \frac{3X^2}{(\sqrt{3}-1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2} \left\{ \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}X \right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{3}+1)^2}{4}X^2 + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}X^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left\{ (\sqrt{3}+1)X \right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3}+1)X &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow X &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ \therefore X &= \pm \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

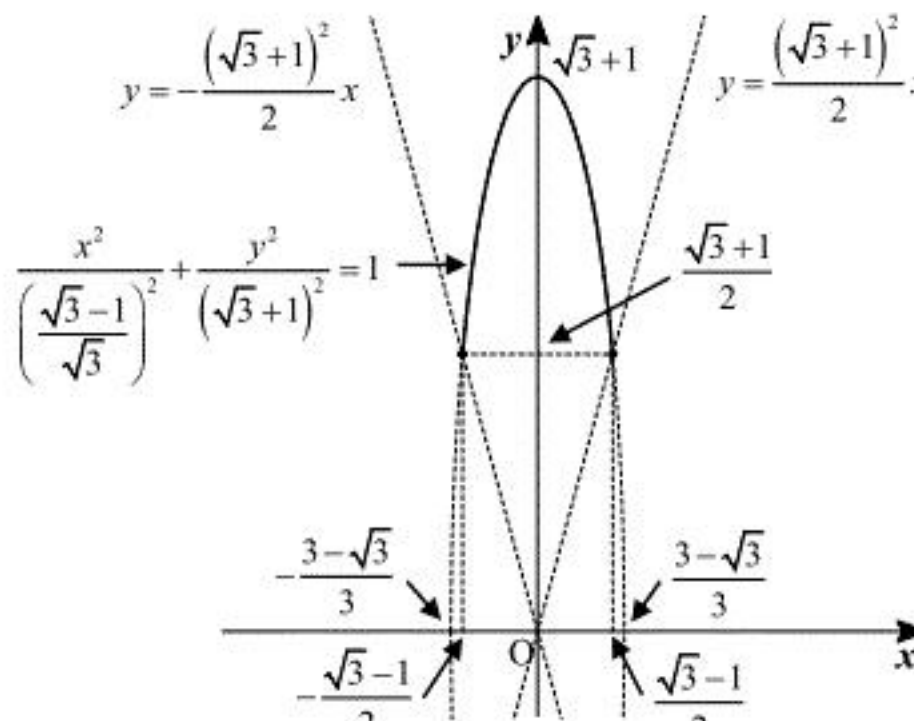
となる。これを⑤に代入して

$$Y = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} \cdot \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) = \pm \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって、②と⑤の共有点の座標は

$$(X, Y) = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

である。②の表す曲線、および③と④の表す領域はy軸対称であるから、軌跡Cもy軸対称となることを考慮して、軌跡Cは下図の実線部となる。ただし端点を含む。



(答) 前図 (ただし端点を含む)

Ⅱ

(1)

任意の正の奇数 n は、ある自然数 k を用いて、 $n = 2k - 1$ と表せる。このとき、

$$n^2 = (2k - 1)^2 = 4(k^2 - k) + 1$$

である。ここで、 $k^2 - k$ は整数であるから、 n^2 を 4 で割った余りは 1 である。

(証明終)

(2)

〔解答〕

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	4	9	16	0	11	24	14	6	0	21	19
b_n	1	16	6	6	0	21	1	21	11	0	16	11

〔解説〕

k_n を整数として $n^2 = 25k_n + a_n$ と表せるとする。このとき n^4 は

$$n^4 = (25k_n + a_n)^2 = 25(25k_n^2 + 2a_nk_n) + a_n^2$$

と計算できる。 $25k_n^2 + 2a_nk_n$ は整数だから、 b_n は a_n^2 を 25 で割った余りに等しい。このことを利用すると、 a_n, b_n ($n = 1, 2, \dots, 12$) は以下のように計算できる。

n	n^2	a_n	a_n^2	b_n
1	$1^2 = 1$	1	$1^2 = 1$	1
2	$2^2 = 4$	4	$4^2 = 16$	16
3	$3^2 = 9$	9	$9^2 = 81 = 25 \times 3 + 6$	6
4	$4^2 = 16$	16	$16^2 = 256 = 25 \times 10 + 6$	6
5	$5^2 = 25 \times 1$	0	$0^2 = 0$	0
6	$6^2 = 36 = 25 \times 1 + 11$	11	$11^2 = 121 = 25 \times 4 + 21$	21
7	$7^2 = 49 = 25 \times 1 + 24$	24	$24^2 = 576 = 25 \times 23 + 1$	1
8	$8^2 = 64 = 25 \times 2 + 14$	14	$14^2 = 196 = 25 \times 7 + 21$	21
9	$9^2 = 81 = 25 \times 3 + 6$	6	$6^2 = 36 = 25 \times 1 + 11$	11
10	$10^2 = 100 = 25 \times 4$	0	$0^2 = 0$	0
11	$11^2 = 121 = 25 \times 4 + 21$	21	$21^2 = 441 = 25 \times 17 + 16$	16
12	$12^2 = 144 = 25 \times 5 + 19$	19	$19^2 = 361 = 25 \times 14 + 11$	11

(3)

(1)より、任意の正の奇数 n はある自然数 m を用いて $n^2 = 2m - 1$ と表される。このとき、 n^4 は

$$n^4 = (2m - 1)^2 = 4(m^2 - m) + 1$$

と計算できる。ここで、 $m^2 - m$ は整数だから、 n^4 を 4 で割った余りは 1 だと分かる。また、任意の正の偶数 n はある自然数 k を用いて $n = 2k$ と表される。このとき、 n^4 は

$$n^4 = 16k^4 = 4 \cdot 4k^4$$

と計算できる。ここで、 $4k^4$ は整数だから、 n^4 を 4 で割った余りは 0 だと分かる。 N は奇数の 4 乗と偶数の 4 乗を 50 個ずつ足し合わせた数だから、 N を 4 で割った余りは次の和

$$1 + 0 + 1 + 0 + \dots + 1 + 0 = 1 \times 50 = 4 \times 12 + 2$$

を 4 で割った余りに等しい。よって、求める解は 2 である。

(答) 2

(4)

$n = 13, 14, \dots, 24$ について、

$$\begin{aligned} n^4 - (25 - n)^4 &= n^4 - (25^4 - {}_4C_1 \cdot 25^3 \cdot n + {}_4C_2 \cdot 25^2 \cdot n^2 - {}_4C_3 \cdot 25 \cdot n^3 + n^4) \\ &= 25(-25^3 + {}_4C_1 \cdot 25^2 \cdot n - {}_4C_2 \cdot 25 \cdot n^2 + {}_4C_3 \cdot n^3) \end{aligned}$$

と計算できる。最後の行は 25 の倍数だから、 n^4 を 25 で割った余りと $(25 - n)^4$ を 25 で割った余りは等しい。よって $b_n = b_{25-n}$ である。また、 25^4 は 25 の倍数だから $b_{25} = 0$ である。さらに、 $n = 26, 27, \dots, 100$ について、

$$\begin{aligned} n^4 - (n - 25)^4 &= n^4 - (n^4 - {}_4C_1 \cdot n^3 \cdot 25 + {}_4C_2 \cdot n^2 \cdot 25^2 - {}_4C_3 \cdot n \cdot 25^3 + 25^4) \\ &= 25({}_4C_1 \cdot n^3 - {}_4C_2 \cdot n^2 \cdot 25 + {}_4C_3 \cdot n \cdot 25^2 - 25^3) \end{aligned}$$

と展開できる。最後の行は 25 の倍数だから、 n^4 を 25 で割った余りと $(n - 25)^4$ を 25 で割った余りは等しい。よって $b_n = b_{n-25}$ である。以上より、 N を 25 で割った余りは次の和

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} b_n &= \sum_{n=1}^{25} (b_n + b_{n+25} + b_{n+50} + b_{n+75}) \\ &= \sum_{n=1}^{25} (b_n + b_n + b_n + b_n) \\ &= 4 \cdot \sum_{n=1}^{25} b_n \\ &= 4 \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{12} (b_n + b_{25-n}) + b_{25} \right\} \\ &= 4 \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{12} (b_n + b_n) + 0 \right\} \\ &= 8 \cdot \sum_{n=1}^{12} b_n \\ &= 8 \cdot (1 + 16 + 6 + 6 + 0 + 21 + 1 + 21 + 11 + 0 + 16 + 11) \\ &= 880 \\ &= 25 \times 35 + 5 \end{aligned}$$

を 25 で割った余りに等しい。よって、求める解は 5 である。

(答) 5

(5)

N を 25 で割った余りが 5 であることから、 N の下 2 桁は 5, 30, 55, 80 のいずれかである。これらのうち、 N を 4 で割った余りが 2 であるという事実に適するのは、30 のみである。よって、 N の下 2 桁は 30 である。

(答) 30

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x} \\ &= \frac{x^n - (qx)^n}{(1-q)x} \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad F(x) = \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1}$$

(2)

$k=1, 2, \dots$ に対して $g_k(x) = \frac{1-q^k}{1-q} x^{k-1}$ とおくと, n 次の多項式 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ に対して,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k (qx)^k}{(1-q)x} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^k - (qx)^k}{(1-q)x} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \cdot \frac{1-q^k}{1-q} x^{k-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore F(x) = \sum_{k=1}^n a_k g_k(x) \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。したがって, $F(x)$ の最高次の項は $n-1$ 次で $a_n \cdot \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1}$ である。つまり, $(*)$ の左辺は $n+1$ 次式であり, 最高次の項のみを計算すると

$$\begin{aligned} & x^2 \cdot \left(a_n \cdot \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1} \right) - (1+q)x \cdot a_n x^n \\ &= a_n \cdot \frac{(1-q^n) - (1+q)(1-q)}{1-q} x^{n+1} \\ &= a_n \cdot \frac{q^2 - q^n}{1-q} x^{n+1} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。一方, $(*)$ の右辺は n 次式であるから, $(*)$ が x についての恒等式になる為には②が 0 となる必要がある。ここで, $f(x)$ は n 次の多項式であったから, $a_n \neq 0$ である。つまり,

$$\begin{aligned} q^2 - q^n &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= 2 \quad (\because 0 < q < 1) \end{aligned}$$

であることが必要である。よって, $f(x)$ は 2 次式であることが示された。

(証明終)

(3)

①より

$$\begin{aligned} F(x) &= g_2(x) + a g_1(x) \\ &= (1+q)x + a \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & x(x-1)F(x) - (1+q)xf(x) = cf(x) \\ \Leftrightarrow & x(x-1)\{(1+q)x+a\} - (1+q)x(x^2+ax+b) = c(x^2+ax+b) \\ \Leftrightarrow & \{a-(1+q)-a(1+q)-c\}x^2 + \{-a-(1+q)b-ac\}x - bc = 0 \\ \Leftrightarrow & \{-aq-(1+q)-c\}x^2 + \{-a-(1+q)b-ac\}x - bc = 0 \end{aligned}$$

である。これが x についての恒等式であるための必要十分条件は,

$$\begin{cases} -aq-(1+q)-c=0 & \dots \textcircled{3} \\ -a-(1+q)b-ac=0 & \dots \textcircled{4} \\ -bc=0 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

である。⑤より $bc=0$ だから, b, c の少なくとも一方は 0 である。

[1] $b=0$ のとき

④より

$$\begin{aligned} -a-ac &= 0 \\ \Leftrightarrow a(c+1) &= 0 \end{aligned}$$

だから, $a=0$ または $c=-1$ だと分かる。 $a=0$ のとき, ③より $c=-1-q$ である。また $c=-1$ のとき, ③より

$$\begin{aligned} q(a+1) &= 0 \\ \therefore a &= -1 \quad (\because q \neq 0) \end{aligned}$$

である。以上より, $(a, c) = (0, -1-q), (-1, -1)$ である。

[2] $c=0$ のとき

③より

$$\begin{aligned} -aq-(1+q) &= 0 \\ \therefore a &= -\frac{1+q}{q} \quad (\because q \neq 0) \end{aligned}$$

である。④より

$$\begin{aligned} -a-(1+q)b &= 0 \\ \therefore b &= -\frac{a}{1+q} = -\frac{1}{1+q} \cdot \left(-\frac{1+q}{q} \right) = \frac{1}{q} \quad (\because 1+q \neq 0) \end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より, 条件を満たす実数 (a, b, c) の組は,

$$(a, b, c) = (0, 0, -1-q), (-1, 0, -1), \left(-\frac{1+q}{q}, \frac{1}{q}, 0 \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b, c) = (0, 0, -1-q), (-1, 0, -1), \left(-\frac{1+q}{q}, \frac{1}{q}, 0 \right)$$

IV

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x \\g'(x) &= pe^{px}\end{aligned}$$

であるから、 ℓ_1 の方程式は

$$\begin{aligned}y-f(a) &= f'(a)(x-a) \\ \Leftrightarrow y-e^a &= e^a(x-a) \\ \Leftrightarrow y &= e^ax+(1-a)e^a\end{aligned}$$

であり、 ℓ_2 の方程式は

$$\begin{aligned}y-g(b) &= g'(b)(x-b) \\ \Leftrightarrow y-e^{pb} &= pe^{pb}(x-b) \\ \Leftrightarrow y &= pe^{pb}x+(1-pb)e^{pb}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \ell_1: y = e^ax + (1-a)e^a, \quad \ell_2: y = pe^{pb}x + (1-pb)e^{pb}$$

(2)

ℓ_1, ℓ_2 が一致する為の必要十分条件は、 $p \neq 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}\begin{cases} e^a = pe^{pb} \\ (1-a)e^a = (1-pb)e^{pb} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = pb + \log p \\ (1-a)p = (1-pb) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a - pb = \log p \\ pa - pb = p - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) = \left(1 + \frac{\log p}{1-p}, \frac{1}{p} + \frac{\log p}{1-p} \right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(1 + \frac{\log p}{1-p}, \frac{1}{p} + \frac{\log p}{1-p} \right)$$

(3)

$$h(p) = \log p \text{ とおく。 } h'(p) = \frac{1}{p} \text{ より}$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \frac{\log p}{p-1} = \lim_{p \rightarrow 1} \frac{h(p) - h(1)}{p-1} = f'(1) = 1$$

であるから、

$$\lim_{p \rightarrow 1} b = \lim_{p \rightarrow 1} \left(\frac{1}{p} + \frac{\log p}{1-p} \right) = 1 + (-1) = 0$$

と求まる。一方、 $t = \log p$ とおくと、与えられた等式より、

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1-p}{\log p} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-e^t}{t} = -\infty$$

である。以上より、

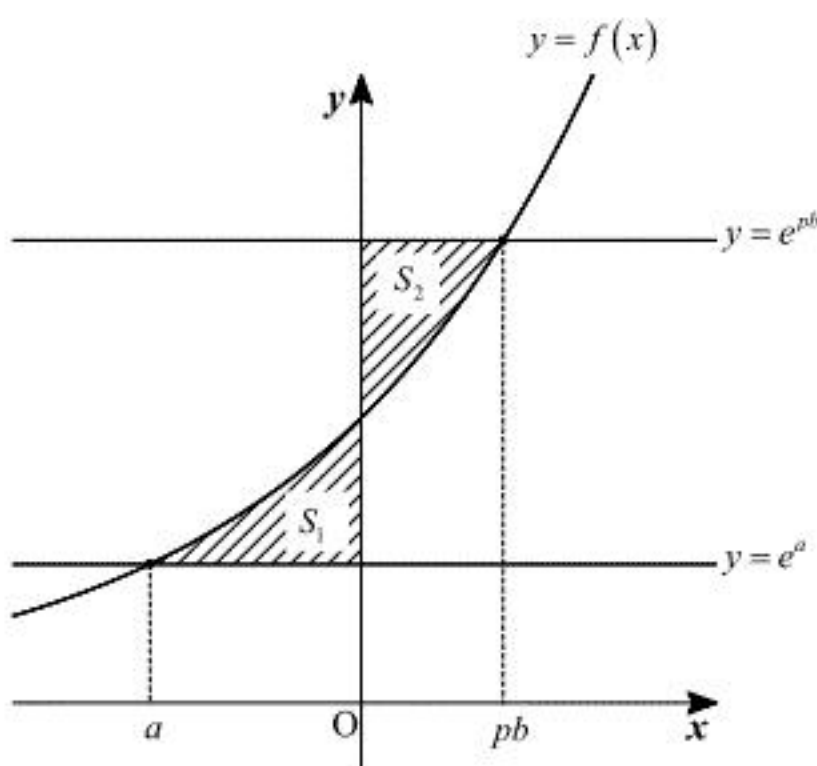
$$\lim_{p \rightarrow \infty} b = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{\log p}{1-p} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{1-p}{\log p}} \right) = 0 + 0 = 0$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{p \rightarrow 1} b = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} b = 0$$

(4)

$0 < p < 1$ のとき $a < 0 < b$ であるから、 S_1, S_2 は以下の斜線部の領域の面積に等しい。



上図より、

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_a^0 (e^x - e^a) dx \\ &= [e^x - e^ax]_a^0 \\ &= 1 - e^a + ae^a \\ S_2 &= \int_0^{pb} (e^{pb} - e^x) dx \\ &= [e^{pb}x - e^x]_0^{pb} \\ &= pbe^{pb} - e^{pb} + 1\end{aligned}$$

である。ここで、(2)より、

$$(1-a)e^a = (1-pb)e^{pb}$$

だから、

$$\begin{aligned}S_2 &= pbe^{pb} - e^{pb} + 1 \\ &= -(1-pb)e^{pb} + 1 \\ &= -(1-a)e^a + 1 \\ &= 1 - e^a + ae^a \\ &= S_1\end{aligned}$$

である。

(証明終)