

I

(i)

$x=t$ (t は実数) における放物線 C_1 の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= (-2t+5) \cdot (x-t) + (-t^2+5t-3) \\ &= (-2t+5)x + t^2 - 3 \end{aligned}$$

である。接線の傾きが -1 のとき,

$$\begin{aligned} -2t+5 &= -1 \\ \Leftrightarrow t &= 3 \end{aligned}$$

であり,

$$-3^2+5 \cdot 3-3=3$$

であるから、接点の座標は $(3, 3)$ である。

(答) $(3, 3)$

(ii)

放物線 C_1, C_2 の共有点の x 座標は、方程式 $-x^2+5x-3=\frac{1}{4}x^2-x+1$ の解である。

$$\begin{aligned} -x^2+5x-3 &= \frac{1}{4}x^2-x+1 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2-6x+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x^2-24x+16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5x-4)(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{4}{5}, 4 \end{aligned}$$

であるから、共有点の x 座標は $\frac{4}{5}, 4$ であり,

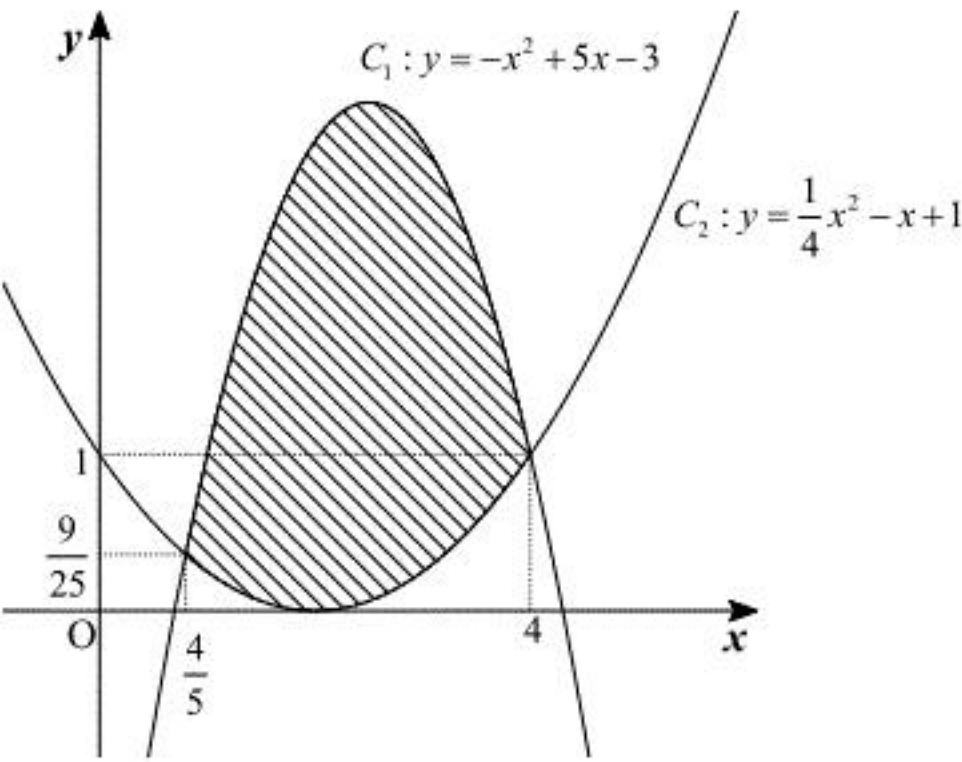
$$\begin{aligned} -\left(\frac{4}{5}\right)^2+5 \cdot \frac{4}{5}-3 &= \frac{9}{25} \\ -4^2+5 \cdot 4-3 &= 1 \end{aligned}$$

であることから、放物線 C_1, C_2 の共有点の座標は $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right), (4, 1)$ である。

(答) $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right), (4, 1)$

(iii)

領域 D は以下になる。



$x+y=k$ (k は実数) と置く。領域 D と共有点を持つ直線 $y=-x+k$ について考え、その y 切片 k の最大値、最小値を求める。 k が最大値を取るのは直線 $y=-x+k$ が放物線 C_1 と接するときである。放物線 C_1 における接線のうち、傾き -1 の接線との接点の座標は、(i) から、 $(3, 3)$ であり、このとき k は最大値 6 を取る。また、 $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$ における放物線 C_2 の接線の傾きは、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} - 1 = -\frac{3}{5} > -1$$

であることから、 k が最小値を取るのは直線 $y=-x+k$ が点 $\left(\frac{4}{5}, \frac{9}{25}\right)$ を通るときであり、この

とき k は最小値 $\frac{29}{25}$ を取る。

(答) 最大値 6 、最小値 $\frac{29}{25}$

II

(i)

18 枚の番号札を同時に 3 枚取り出す場合の数は ${}_{18}C_3$ 通りである。ある自然数 k に対し 3 つの連続する番号を取り出したとき、考えられる組み合わせは

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), \dots, (15, 16, 17), (16, 17, 18)$$

の 16 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{16}{{}_{18}C_3} = \frac{1}{51}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{51}$$

(ii)

取り出した番号札の番号を k, l, m ($1 \leq k, l, m \leq 18$) とすると、どの 2 つの番号も連続していないことから、

$$\begin{aligned} k+1 < l, l+1 < m \\ \Leftrightarrow k < l-1 < m-2 \end{aligned}$$

であるといえる。ここで、 $l-1=l', m-2=m'$ とおくと、 $k < l' < m'$ ($1 \leq k, m' \leq 16$) であるから、どの 2 つの番号も連続していない組み合わせの数は、 $1 \leq k < l' < m' \leq 16$ となる k, l', m' の組み合わせの数に等しい。したがって求める確率は、

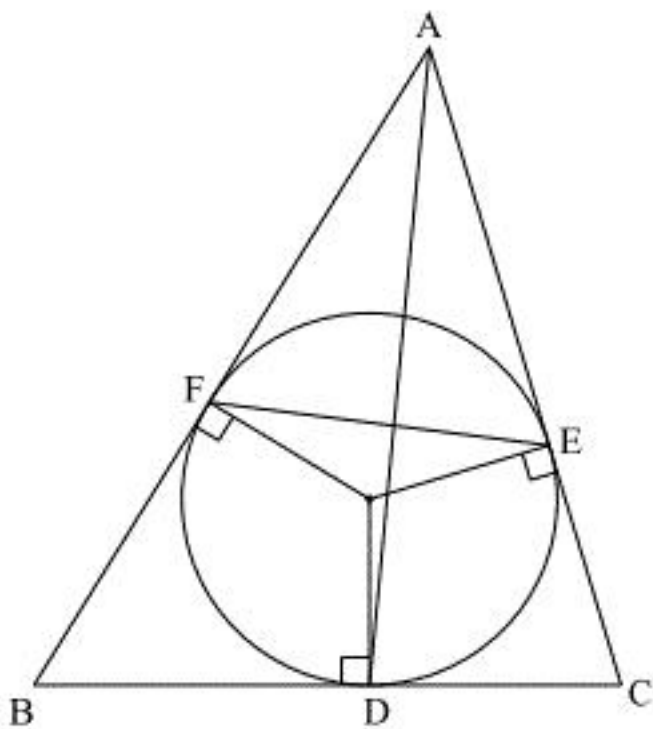
$$\frac{{}_{16}C_3}{{}_{18}C_3} = \frac{15 \cdot 14}{18 \cdot 17} = \frac{35}{51}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{51}$$

Ⅲ

(i)



△ABC と内接円の関係より，
 $AE = AF, BD = BF, CD = CE$

であるから，

$$\begin{aligned} AE &= \frac{AE + AF}{2} \\ &= \frac{(AC - CE) + (AB - BF)}{2} \\ &= \frac{AB + AC - BD - DC}{2} \\ &= \frac{AB + AC - BC}{2} \\ &= \frac{9 + 8 - 7}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

である。

(答) $AE = 5$

(ii)

△ABC において余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{9^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 9 \cdot 8} \\ &= \frac{96}{144} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。また，△AFE において余弦定理より，

$$\begin{aligned} EF^2 &= AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos \angle EAF \\ &= 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{50}{3} \\ \therefore EF &= \frac{5}{3}\sqrt{6} \quad (\because EF > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $EF = \frac{5}{3}\sqrt{6}$

(iii)

△ABC において余弦定理より，

$$\begin{aligned} \cos \angle ACB &= \frac{8^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} \\ &= \frac{32}{112} \\ &= \frac{2}{7} \end{aligned}$$

である。また，△ADC において余弦定理より，

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos \angle ACB \\ &= 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \frac{2}{7} \\ &= \frac{415}{7} \\ \therefore AD &= \frac{\sqrt{2905}}{7} \quad (\because AD > 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $AD = \frac{\sqrt{2905}}{7}$

IV

(i)

n 次式 $(x+1) \times (x+2) \times \cdots \times (x+n)$ の x^{n-1} の項は、 $(x+1)$ から $(x+n)$ の n 個の因数のうち、 $n-1$ 個から x を、1 個から定数を取り出し、かけたものを足し合わせたものである。したがって、

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= 1+2+\cdots+n \\ &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii)

5 次方程式 $(x+1) \times (x+2) \times (x+3) \times (x+4) \times (x+5)$ の x^3 の項は、 $(x+1)$ から $(x+5)$ の 5 個の因数のうち、3 個から x を、2 個から定数を取り出し、かけたものを足し合わせたものである。したがって、

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) \\ &= \sum_{k=1}^5 k \left\{ \left(\sum_{i=1}^5 i \right) - k \right\} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^5 k \left(\frac{5 \cdot 6}{2} - k \right)}{2} \\ &= \frac{15 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 k^2}{2} \\ &= \frac{15 \frac{5 \cdot 6}{2} - \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{6}}{2} \\ &= \frac{225 - 55}{2} \\ &= 85 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_3 = 85$

(iii)

(ii) と同様にして a_{n-2} を求める。 n 次式 $(x+1) \times (x+2) \times \cdots \times (x+n)$ の x^{n-2} の項は、 $(x+1)$ から $(x+n)$ の n 個の因数のうち、 $n-2$ 個から x を、2 個から定数を取り出し、かけたものを足し合わせたものである。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= (2+3+\cdots+n) \cdot 1 + (3+4+\cdots+n) \cdot 2 + \cdots + \{(n-1)+n\} \cdot (n-2) + n \cdot (n-1) \\ &= \frac{\left(\sum_{k=1}^n k - 1 \right) \cdot 1 + \left(\sum_{k=1}^n k - 2 \right) \cdot 2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n k - n \right) \cdot n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n(n+1)}{2} - i \right) \cdot i \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 - n - 2) \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_{n-2} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$