

I

(1)(a)

袋 A と B のどちらからも白玉が取り出される確率は

$$\frac{3}{3+2} \cdot \frac{4}{4+6} = \frac{6}{25}$$

となる。

(答) $\frac{6}{25}$

(b)

袋 A 中の白玉と赤玉の個数が変わらないのは、袋 A と B のどちらからも白玉が取り出される場合、またはどちらからも赤玉が取り出される場合であり、後者の確率は

$$\frac{2}{3+2} \cdot \frac{6}{4+6} = \frac{6}{25}$$

となるから、(1)と合わせて求める確率は

$$\frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

となる。

(答) $\frac{12}{25}$

(2)

袋 A, B から2個の玉を取り出す場合の数はそれぞれ ${}_5C_2, {}_{10}C_2$ であり、これらは同様に確からしく起こる。袋の中に同じ色の玉が3個以上あるとき、その袋から2個の玉を取り出してその色の玉がなくなることは無い。したがって、袋の中の玉が全て同色になるのは A から赤玉2個を取り出し B から白玉2個を取り出す場合に限る。その確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \cdot \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{45} = \frac{1}{75}$$

となる。

(答) $\frac{1}{75}$

(3)(a)

白玉が取り出されるのは、サイコロを投げて $\{1, 2, 3, 4\}$ が出て袋 A から白玉を取り出す場合か、 $\{5, 6\}$ が出て袋 B から白玉を取り出す場合である。よって、求める確率は

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{15}$$

となる。

(答) $\frac{8}{15}$

(b)

袋 A から白玉を取り出す確率は

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

であるから、求める確率は

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{4}$$

となる。

(答) $\frac{3}{4}$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{であるから, 求める内積は}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= 2\cos\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin\theta \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) \\ &= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

(2)

$$-\pi < \theta < \pi \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$$

であるから, $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき, $f(\theta)$ は最大値 2 をとる。

$$(\text{答}) \quad 2$$

(3)

$$\begin{aligned} f(\theta) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから, $f(\theta) \geq 0$ を満たす θ の範囲は $-\pi < \theta < \pi$ より,

$$0 \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$$

(4)

$f(\theta) = x$ とおくと, 与えられた式は

$$\begin{aligned} y &= (x+1)^2(2-x) \\ &= -x^3 + 3x + 2 \end{aligned}$$

となる。また(2), (3)より $0 \leq x \leq 2$ となるから, このもとで最大値と最小値を求める。 y を x で微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2 + 3 \\ &= -3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

となるから, y の $0 \leq x \leq 2$ における増減は次のようになる。

x	0	...	1	...	2
y'		+	0	-	
y		↗		↘	

前表より, y は $x=1$ のとき最大値をとり, その最大値は

$$(1+1)^2(2-1) = 4$$

である。また, $x=1$ のときの θ は

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \theta &= -\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \\ \therefore \theta &= -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \quad (\because -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi) \end{aligned}$$

となる。また, $x=0$ のとき

$$y = (0+1)^2(2-0) = 2$$

となり, $x=2$ のとき

$$y = (2+1)^2(2-2) = 0$$

となるから, y は $x=2$ で最小値 0 をとる。このとき θ は

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{6} \quad (\because -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} & \theta = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \text{最大値 } 4 \\ (\text{答}) \quad & \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき} \quad \text{最小値 } 0 \end{aligned}$$

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}x^3-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=1, x^2+x+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x=1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ \therefore x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(2)

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(-1)^2 - 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2}{4} \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{3}i - 3}{4} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

$$\text{となる。また, } \omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3}i + (\sqrt{3}i)^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{3}i - 3}{4} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって、方程式 $x^3-1=0$ の1以外の解を ω とすると、もう1つの解は ω^2 となる。
(証明終)

(3)

$P(x) = ax^{3n} + bx^{3n-1}$ を x^2+x+1 で割った余りが $x+3$ となるから $P(x)$ は多項式 $Q(x)$ を用いて

$$\begin{aligned}P(x) &= (x^2+x+1)Q(x) + x+3 \\ \Leftrightarrow P(x) - x - 3 &= (x^2+x+1)Q(x)\end{aligned}$$

と表せる。(1)より $x^2+x+1=0$ の解が ω, ω^2 であり、 $\omega^2+\omega+1=0, (\omega^2)^2+\omega^2+1=0$ が成り立つから、

$$\begin{cases} P(\omega) - \omega - 3 = (\omega^2 + \omega + 1)Q(\omega) = 0 \\ P(\omega^2) - \omega^2 - 3 = \{(\omega^2)^2 + \omega^2 + 1\}Q(\omega^2) = 0 \end{cases}$$

となり ω, ω^2 はともに方程式 $P(x) - x - 3 = 0$ の解である。

(証明終)

(4)

(1)より ω は $x^3-1=0$ の解であるから

$$\begin{aligned}\omega^3-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^3 &= 1\end{aligned}$$

となる。(3)より $P(\omega) - \omega - 3 = 0$ が成り立つから

$$\begin{aligned}a\omega^{3n} + b\omega^{3n-1} - \omega - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a(\omega^3)^n + b(\omega^3)^{n-1} \cdot \omega^2 - \omega - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b\omega^2 - \omega - 3 &= 0 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であり、また(3)より $P(\omega^2) - \omega^2 - 3 = 0$ が成り立つから

$$\begin{aligned}a(\omega^2)^{3n} + b(\omega^2)^{3n-1} - \omega^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a(\omega^3)^{2n} + b(\omega^3)^{2(n-1)} \cdot \omega^4 - \omega^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b\omega^3 \cdot \omega - \omega^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a + b\omega - \omega^2 - 3 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。 $\omega \neq 1 \Leftrightarrow \omega - 1 \neq 0$ であるから $\textcircled{2} \times \omega - \textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}a(\omega-1) - \omega^3 + \omega - 3\omega + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow a = \frac{2\omega-2}{\omega-1} \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

となる。また、 $\omega^2 \neq \omega \Leftrightarrow \omega^2 - \omega \neq 0$ であるから $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned}b(\omega^2 - \omega) - \omega + \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b = \frac{-\omega^2 + \omega}{\omega^2 - \omega} \\ \therefore b &= -1\end{aligned}$$

となる。これは a, b が実数であるという条件を満たすため、解となる。

$$(\text{答}) \quad a=2, b=-1$$