

I

以下、整数 q_k を用いて、 $5^k = 13q_k + r_k$ と表されたとする。

(i)

$r_k = 5$ のとき、 $5^k = 13q_k + 5$ である。このとき、

$$\begin{aligned} 5^{k+2} &= 5^2 \cdot 5^k \\ &= 25(13q_k + 5) \\ &= 13 \cdot 25q_k + 125 \\ &= 13(25q_k + 9) + 8 \end{aligned}$$

であり、 $25q_k + 9$ は整数であるから、 $r_{k+2} = 8$ となる。

(答) $r_{k+2} = 8$

(ii)

$r_k = 8$ のとき、 $5^k = 13q_k + 8$ である。このとき、

$$\begin{aligned} 5^{k+2} &= 5^2 \cdot 5^k \\ &= 25(13q_k + 8) \\ &= 13 \cdot 25q_k + 200 \\ &= 13(25q_k + 15) + 5 \end{aligned}$$

であり、 $25q_k + 15$ は整数であるから、 $r_{k+2} = 5$ となる。

(答) $r_{k+2} = 5$

(iii)

(i), (ii) から、 $r_k = 5$ のとき、 $r_{k+4} = 5$ である。また、 $r_1 = 5$ であるから、 m を 0 以上の整数とすると、 $r_{4m+1} = 5$ となる。ここで、 $r_{2017} = 5$ であるから、 $2018 = 4 \cdot 504 + 2$ より、

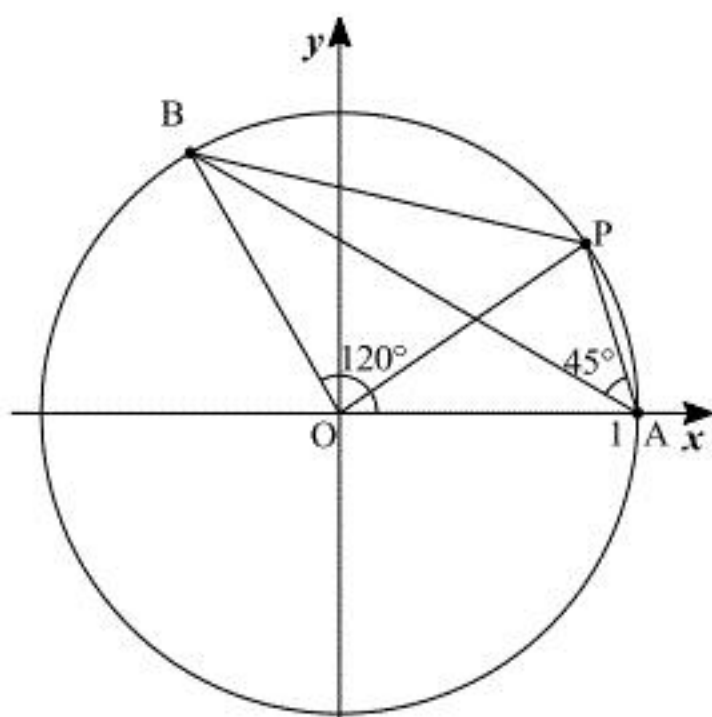
$$\begin{aligned} 5^{2018} &= 5 \cdot 5^{2017} \\ &= 5(13q_{2017} + 5) \\ &= 13 \cdot 5q_{2017} + 25 \\ &= 13(5q_{2017} + 1) + 12 \end{aligned}$$

となる。 $5q_{2017} + 1$ は整数であるから、 $r_{2018} = 12$ である。

(答) $r_{2018} = 12$

座標平面で考える。点Oを原点、点Aを(1, 0)、点Bを $(\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ にそれぞれとる。

(i)



$\angle PAB = 45^\circ$ のとき、円周角の定理より、 $\angle POB = 2\angle PAB = 90^\circ$ であるから、

$$\begin{aligned}\angle AOP &= \angle AOB - \angle POB \\ &= 120^\circ - 90^\circ \\ &= 30^\circ\end{aligned}$$

となる。よって、点Pの座標は、 $(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である。これより、弦APの長さは、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

と求められる。また、弦BPは、 $\triangle POB$ が $OP = BP = 1$ 、 $\angle POB = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であることから、 $BP = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ と求められる。

$$(\text{答}) \quad AP = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad BP = \sqrt{2}$$

(ii)

$P(\cos \theta, \sin \theta) \left(0 < \theta < \frac{2}{3}\pi\right)$ として、弦AP, BPの長さを θ を用いて表すと、それぞれ、

$$\begin{aligned}AP &= \sqrt{(\cos \theta - 1)^2 + (\sin \theta - 0)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1 + \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos \theta} \\ &= \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= \sqrt{4\sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\because \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}\right)} \\ &= 2\sin \frac{\theta}{2} \quad (\because 0 < \theta < \frac{2}{3}\pi \text{ より } \sin \frac{\theta}{2} > 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BP &= \sqrt{\left(\cos \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta + \cos \theta + \frac{1}{4} + \sin^2 \theta - \sqrt{3}\sin \theta + \frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{2 + \cos \theta - \sqrt{3}\sin \theta} \\ &= \sqrt{2 - 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\right\}} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} \\ &= \sqrt{4 \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)}{2}} \\ &= \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \left(\because \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}\right)} \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (\because 0 < \frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{3} \text{ より } \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) > 0)\end{aligned}$$

となる。よって、和積公式 $\sin A + \sin B = 2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ を利用して、

$$\begin{aligned}AP + BP &= 2\sin \frac{\theta}{2} + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin \frac{\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{2} \cos \frac{\frac{\theta}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2}\right)}{2} \\ &= 4\sin \frac{\pi}{6} \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$ のとき、 $-\frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}$ であるから、 $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $AP + BP$ は最大値2をとる。

(答) 2

Ⅲ

(i)

$y = x^3 - 3x$ について、 $y' = 3x^2 - 3$ であるから、点 $(p, p^3 - 3p)$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3p^2 - 3)(x - p) + p^3 - 3p \\ &= 3(p^2 - 1)x - 2p^3 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 3(p^2 - 1)x - 2p^3$

(ii)

点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ への接線がちょうど 2 本存在するとき、 p の方程式

$$\begin{aligned} b &= 3(p^2 - 1)a - 2p^3 \\ \Leftrightarrow b &= -2p^3 + 3ap^2 - 3a \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

が相異なる 2 つの実数解をもつ。 $f(p) = -2p^3 + 3ap^2 - 3a$ とおくと、 pq 平面上で曲線 $q = f(p)$ と直線 $q = b$ の共有点の個数が方程式①の解の個数に一致する。ここで、

$$\begin{aligned} f'(p) &= -6p^2 + 6ap \\ &= -6p(p - a) \end{aligned}$$

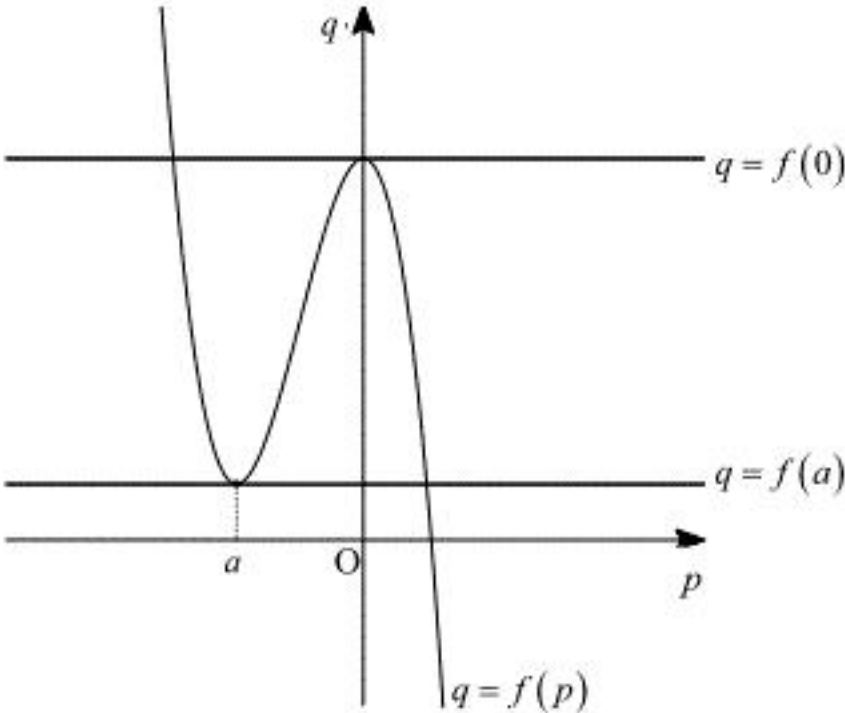
であるから、 $f'(p) = 0$ のとき、 $p = 0, a$ である。以下、 a の値で場合分けする。

[1] $a < 0$ のとき

$f(p)$ の増減は以下ようになる。

p	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(p)$	-	0	+	0	-
$f(p)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより、 pq 平面上で $q = f(p)$ のグラフは以下ようになる。



グラフより、曲線 $q = f(p)$ と直線 $q = b$ が共有点をちょうど 2 つもつとき、 $b = f(0)$ または $b = f(a)$ である。 $f(0) = -3a$ 、 $f(a) = a^3 - 3a$ であるから、点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ への接線がちょうど 2 本存在するとき、 a, b の満たす関係式は、 $b = -3a$ または $b = a^3 - 3a$ となる。

[2] $a = 0$ のとき

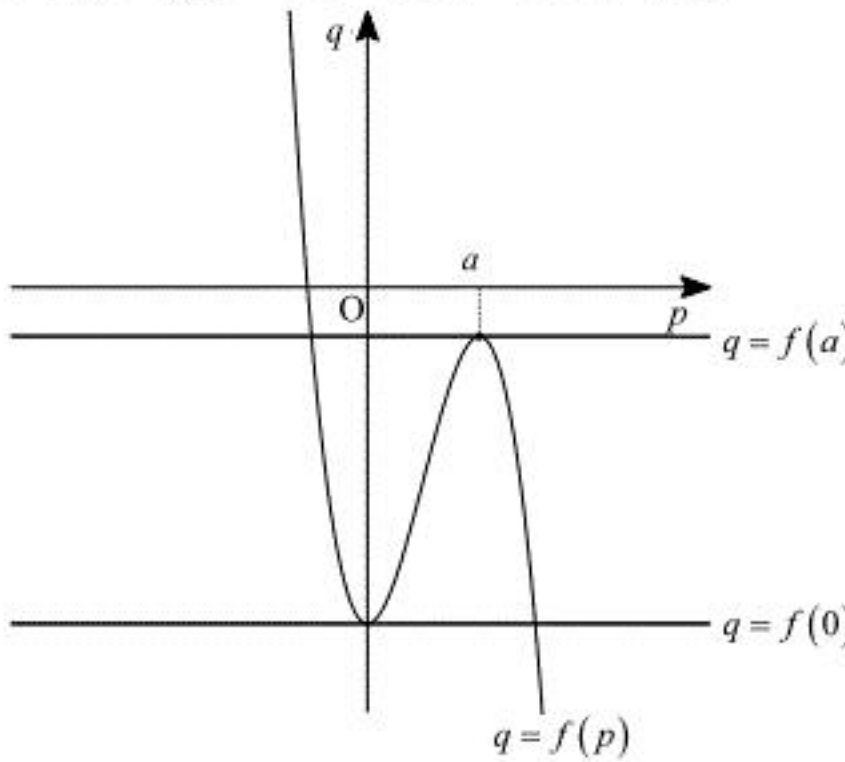
$f(p) = -2p^3$ 、 $f'(p) = -6p^2 < 0$ であり、 $f(p)$ が常に減少する関数となるから、方程式 $b = f(p)$ が相異なる 2 つの実数解をもつような実数 b は存在しない。よって、 $a = 0$ は不適である。

[3] $a > 0$ のとき

$f(p)$ の増減は以下ようになる。

p	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(p)$	-	0	+	0	-
$f(p)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

これより、 pq 平面上で $q = f(p)$ のグラフは以下ようになる。



グラフより、 $a < 0$ のときと同様に、曲線 $q = f(p)$ と直線 $q = b$ が共有点をちょうど 2 つもつとき、 $b = f(0)$ または $b = f(a)$ である。よって、求める関係式は、 $b = -3a$ または $b = a^3 - 3a$ となる。

以上、[1], [2], [3]より、求める関係式は、 $b = -3a$ または $b = a^3 - 3a$ ($a \neq 0$) となる。

(答) $b = -3a$ または $b = a^3 - 3a$ (ただしどちらも $a \neq 0$)

IV

(i)

X, Y, Z の 3 つのロッカーを A, B の 2 人に 1 つずつ無作為に貸与する全事象は、互いに異なる 3 つのものから 2 つを選んで並べる場合の数に等しいから、 ${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$ (通り) であり、これらは同様に確からしく起こる。したがって 2 日間 A, B に与えるロッカーの全ての割り振り方は 6^2 通りである。また 2 日間同じロッカーを貸与する割り振り方は、1 日目に 6 通りの割り振り方があり、2 日目は 1 日目と同じ割り振り方にと考えて合計 6 通りである。よって、求める確率は、

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

(ii)

(i) より 1 日目に A, B に与えるロッカーの割り振り方は 6 通りである。ここで 1 日目のロッカーとして A に X, B に Y が与えられたとする。以下、2 日目のロッカーの割り振りを考える。2 日目のロッカーが 1 日目と異なるとき、2 日目に A に貸与するロッカーは Y か Z である。

[1] 2 日目に A に Y のロッカーを貸与する場合

このとき 2 日目に B に貸与するロッカーは、Y 以外のロッカーであるから、X か Z の 2 通りである。

[2] 2 日目に A に Z のロッカーを貸与する場合

このとき 2 日目に B に貸与するロッカーは、Y と Z 以外のロッカーであるから、X の 1 通りである。

以上 [1], [2] より、1 日目のロッカーとして A に X, B に Y が与えられたとき、題意をみたすロッカーの割り振り方は 3 通りである。1 日目に A, B に与えるロッカーの割り振りが他の場合も同様であるから、題意をみたすロッカーの割り振り方は全部で $3 \times 6 = 18$ (通り) である。したがって求める確率は、 $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ となる。

(答) $\frac{1}{2}$