

I

(i)

与式は,

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

と変形できるため, 数列 $\{a_n + 1\}$ は初項が $a_1 + 1 = 2$, 公比が 2 の等比数列となる。よって a_n の一般項は,

$$a_n + 1 = 2^{n-1} \cdot 2$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

となる。

(答) $a_n = 2^n - 1$

(ii)

$b_{n+2} = 2b_{n+1} + n + 1$ から $b_{n+1} = 2b_n + n$ をひくと,

$$b_{n+2} - b_{n+1} = 2b_{n+1} + n + 1 - (2b_n + n)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+2} - b_{n+1} = 2(b_{n+1} - b_n) + 1$$

$$\therefore c_{n+1} = 2c_n + 1$$

となる。これは(i)と同様にして

$$c_{n+1} + 1 = 2(c_n + 1)$$

と変形できることから, 数列 $\{c_n + 1\}$ は $c_1 = b_2 - b_1 = 2b_1 + 1 - b_1 = 2$ より, 初項 3, 公比 2 の等比数列となるため, c_n の一般項は

$$c_n + 1 = 2^{n-1} \cdot 3$$

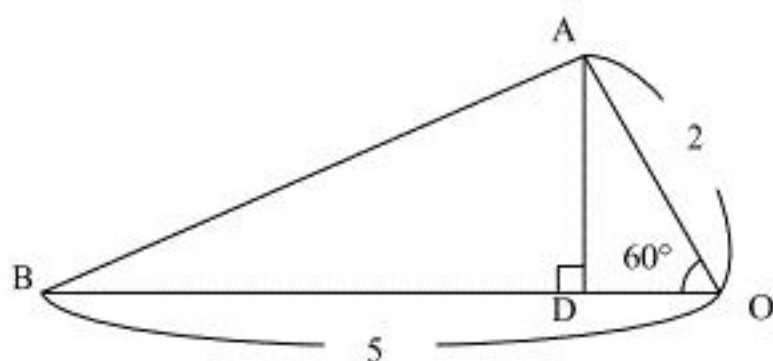
$$\therefore c_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

となる。

(答) $c_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$

II

(i)



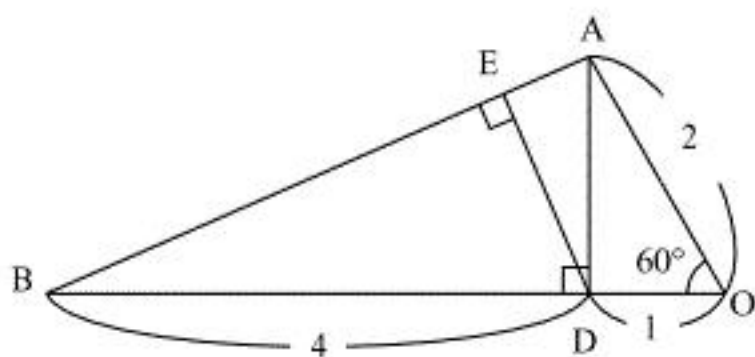
$\triangle ADO$ は、 $\angle ADO = 90^\circ$, $\angle AOD = 60^\circ$ の直角三角形であるため、 $AO:OD = 2:1$ となり、 $OD = 1$ となる。点 D は直線 OB 上にあるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{1}{5} \vec{b}$$

となる。

(答) $\frac{1}{5} \vec{b}$

(ii)



$\triangle ADO$ に関する三平方の定理より $AD^2 = AO^2 - OD^2 = 3$ であるため、 $\triangle ABD$ に関する三平方の定理より

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 3 + 16 = 19$$

$$\therefore AB = \sqrt{19}$$

となる。また $\triangle ABD$ と $\triangle DBE$ について、 $\angle ABD = \angle DBE$ であり、 $\angle ADB = \angle DEB = 90^\circ$ であるため、二角相等より相似である。よって相似比を用いて、

$$AB:DB = DB:EB$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot EB = DB^2$$

$$\therefore EB = \frac{DB^2}{AB}$$

となる。また $AB = \sqrt{19}$, $DB = 4$ であるから、

$$EB = \frac{4^2}{\sqrt{19}} = \frac{16}{19} \sqrt{19}$$

となる。したがって、 $AE = \sqrt{19} - \frac{16}{19} \sqrt{19} = \frac{3}{19} \sqrt{19}$ であり、 $AE:EB = 3:16$ とわかる。よって、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{16}{19} \vec{a} + \frac{3}{19} \vec{b} \text{ となる。}$$

(答) $\overrightarrow{OE} = \frac{16}{19} \vec{a} + \frac{3}{19} \vec{b}$

Ⅲ

(i)

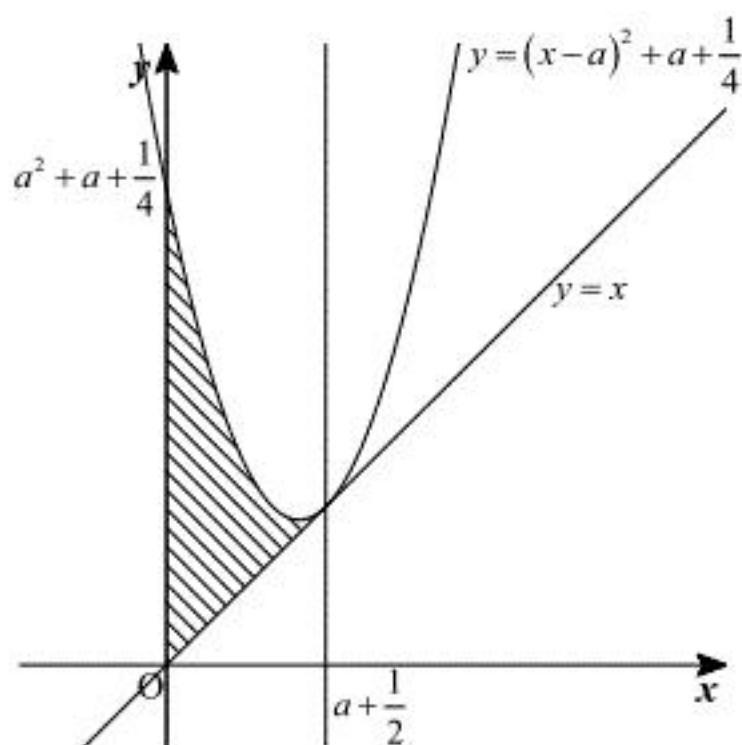
$f(x) = (x-a)^2 + a + \frac{1}{4}$ とおくと, $f'(x) = 2(x-a)$ であるため, 放物線 C の $x=t$ における接線の傾きは $2(t-a)$ となる。また接線 l は原点を通る直線であり, x 軸とのなす角が 45° であるため, この直線の式は $y=x$ である。よって t は,

$$\begin{aligned} 2(t-a) &= 1 \\ \therefore t &= a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と a を用いて表すことができる。

(答) $t = a + \frac{1}{2}$

(ii)



上図より領域の面積は,

$$\begin{aligned} & \int_0^{a+\frac{1}{2}} \left\{ (x-a)^2 + a + \frac{1}{4} - x \right\} dx \\ &= \int_0^{a+\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - (2a+1)x + a^2 + a + \frac{1}{4} \right\} dx \\ &= \int_0^{a+\frac{1}{2}} \left\{ x^2 - 2\left(a + \frac{1}{2}\right)x + \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 \right\} dx \\ &= \int_0^{a+\frac{1}{2}} \left\{ x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left\{ x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \right\}^3 \right]_0^{a+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。よって囲まれた領域の面積が 9 となるのは,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(a + \frac{1}{2} \right)^3 &= 9 \\ \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{2} \right)^3 &= 27 \\ \Leftrightarrow a + \frac{1}{2} &= 3 \\ \therefore a &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

となるときである。

(答) $a = \frac{5}{2}$

IV

(i)

A, B, Cはそれぞれ好きな色をどの色の組み合わせでも2本選べるため、6本ずつの3色のバラから6本好きに色を選んだ時の花束の種類の数と同じである。6つの玉および仕切り板2つを横一列に並べるときの並べ方の場合の数は、左側の仕切りより左側にある玉が赤色、仕切り同士の間にある玉が黄色、右側の仕切りより右側にある玉が白色と考えることで求める作ることが可能な花束の種類と等しくなる。ゆえに、

$${}_{6+2}C_2 = {}_8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 28通り

(ii)

各花瓶で赤いバラを2本選ぶ確率は $\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$ 、赤いバラを選ばない確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{2}{5}$ となる。

また余事象を考えることにより、赤いバラを1本選ぶ確率は $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$ となる。花束に赤いバラが無いときというのは、どの花瓶においても赤いバラを選ばなかったときであるから、求める確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$$

となる。

(答) $\frac{8}{125}$

(iii)

2つの花瓶から赤いバラを1本ずつ選ぶとき、および1つの花瓶から2本赤いバラを選ぶとき、花束に赤いバラがちょうど2本となる。2つの花瓶から赤いバラを1本ずつ選ぶ確率は

$$\left(\frac{8}{15}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot {}_3C_1 = \frac{128}{375}$$

であり、1つの花瓶から2本のバラを選ぶ確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{15}\right) \cdot {}_3C_1 = \frac{4}{125}$$

であるため、花束の赤いバラが2本である確率は

$$\frac{4}{125} + \frac{128}{375} = \frac{28}{75}$$

となる。

(答) $\frac{28}{75}$