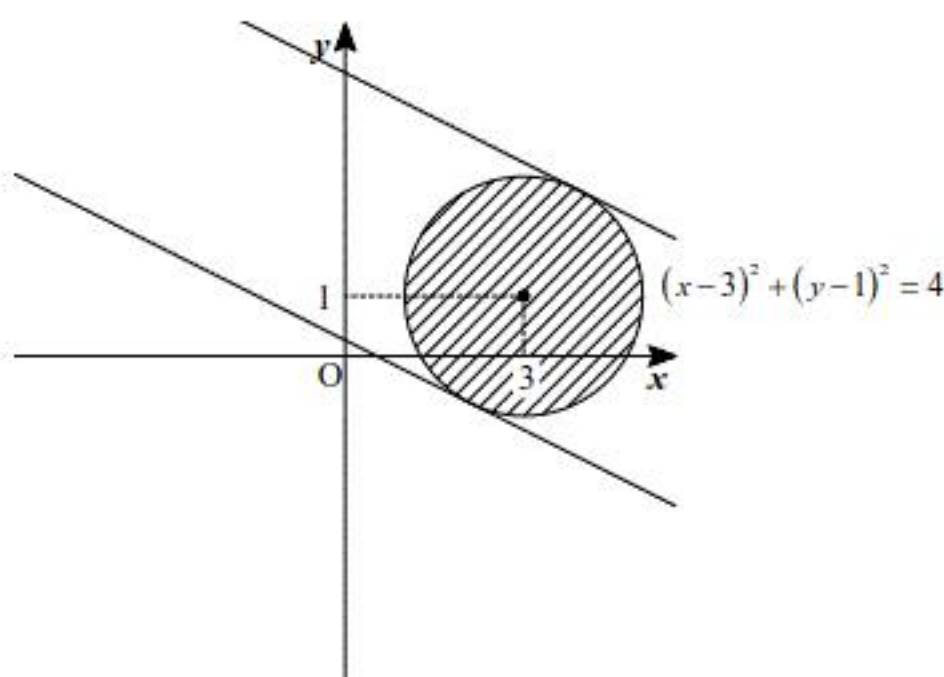


I

(1)

$x+2y=k$ とおくと、 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ と変形でき、傾き $-\frac{1}{2}$ で y 切片 $\frac{k}{2}$ の直線を示す。このとき、この直線と不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leq 4$ が表す領域が共有点を持つときの k の最大値および最小値を求める。 k の最大値および最小値は直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ の y 切片の最大値および最小値を考えることに等しく、次図のように円 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ と直線 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ が接するとき

に最大値、最小値をとる。斜線部分は領域 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leq 4$ を示し、境界線も含む。



このとき $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ に $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ を代入した方程式は重解をもつ。

$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ に $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{k}{2} - 1\right)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - (2k+20)x + k^2 - 4k + 24 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となり、①の判別式を D_1 とすると、重解をもつので

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-(k+10)\}^2 - 5 \cdot (k^2 - 4k + 24) &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 10k + 5 &= 0 \\ \therefore k &= 5 \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 k の最大値は $5+2\sqrt{5}$ であり、最小値は $5-2\sqrt{5}$ となる。また、①に $k=5 \pm 2\sqrt{5}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 5x^2 - (30 \pm 4\sqrt{5})x + (5 \pm 2\sqrt{5})^2 - 4(5 \pm 2\sqrt{5}) + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5 \left\{ x - \left(3 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5} \right) \right\}^2 &= 0 \\ \therefore x &= 3 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{aligned}$$

となり、 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ に $k=5 \pm 2\sqrt{5}$, $x=3 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}$ (複号同順) を代入すると、

$$y = -\frac{1}{2} \left(3 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5} \right) + \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \frac{4}{5}\sqrt{5}$$

となる。

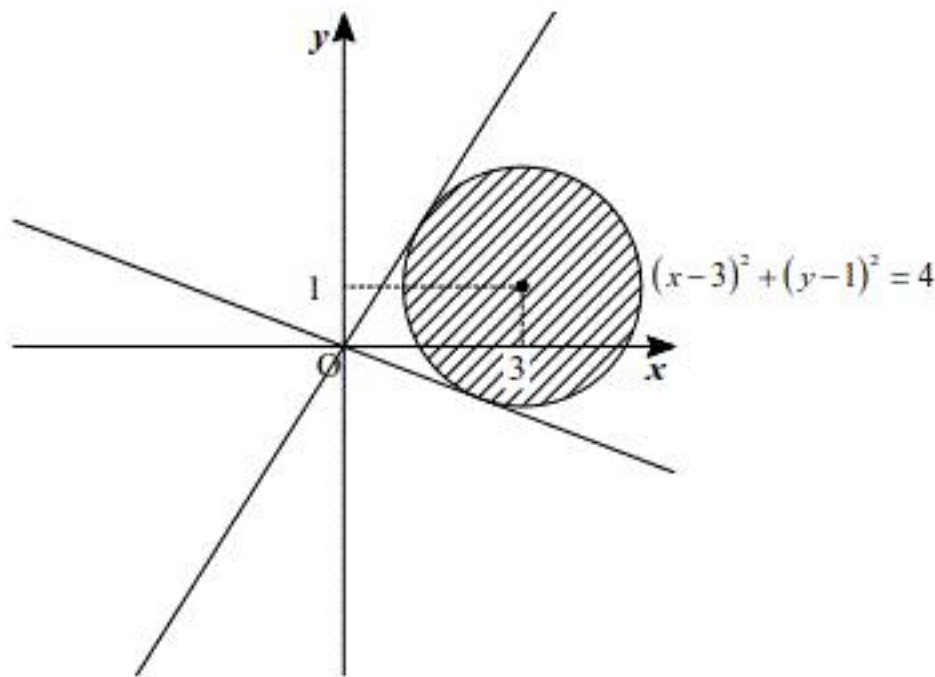
$$(\text{答}) (x, y) = \left(3 + \frac{2}{5}\sqrt{5}, 1 + \frac{4}{5}\sqrt{5} \right) \text{ で最大値 } 5+2\sqrt{5}$$

$$(x, y) = \left(3 - \frac{2}{5}\sqrt{5}, 1 - \frac{4}{5}\sqrt{5} \right) \text{ で最小値 } 5-2\sqrt{5}$$

(2)

$\frac{y}{x}=p$ とおくと、 $y=px$ と変形でき、傾き p で原点を通る直線を示す。このとき、この直線と不等式 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leq 4$ が表す領域が共有点を持つときの p の最大値および最小値を求める。 p の最大値および最小値はこの直線の傾きの最大値および最小値を考えることに等しく、次図のように円 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ と直線 $y=px$ が接するときに最大値、最小値をとる。

斜線部分は領域 $(x-3)^2+(y-1)^2 \leq 4$ を示し、境界線も含む。



このとき $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ に $y=px$ を代入した方程式は重解をもつ。 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$ に $y=px$ を代入すると、

$$\begin{aligned} (x-3)^2 + (px-1)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (1+p^2)x^2 - (2p+6)x + 6 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、②の判別式を D_2 とすると、重解をもつので

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-(p+3)\}^2 - (1+p^2) \cdot 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5p^2 - 6p - 3 &= 0 \\ \therefore p &= \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 p の最大値は $\frac{3+2\sqrt{6}}{5}$ であり、最小値は $\frac{3-2\sqrt{6}}{5}$ となる。また、②に

$p=\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + \left(\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} \right) \right\} x^2 - \left(2 \cdot \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} + 6 \right) x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{58 \pm 12\sqrt{6}}{25} \left\{ x - \left(\frac{9}{5} \mp \frac{\sqrt{6}}{5} \right) \right\}^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{9}{5} \mp \frac{\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

となり、 $y=px$ に $p=\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5}$, $x=\frac{9}{5} \mp \frac{\sqrt{6}}{5}$ (複号同順) を代入すると、

$$y = \left(\frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} \right) \cdot \left(\frac{9}{5} \mp \frac{\sqrt{6}}{5} \right) = \frac{3}{5} \pm \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

となる。

$$(\text{答}) (x, y) = \left(\frac{9}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{3}{5} + \frac{3\sqrt{6}}{5} \right) \text{ で最大値 } \frac{3+2\sqrt{6}}{5}$$

$$(x, y) = \left(\frac{9}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}, \frac{3}{5} - \frac{3\sqrt{6}}{5} \right) \text{ で最小値 } \frac{3-2\sqrt{6}}{5}$$

II

(1)

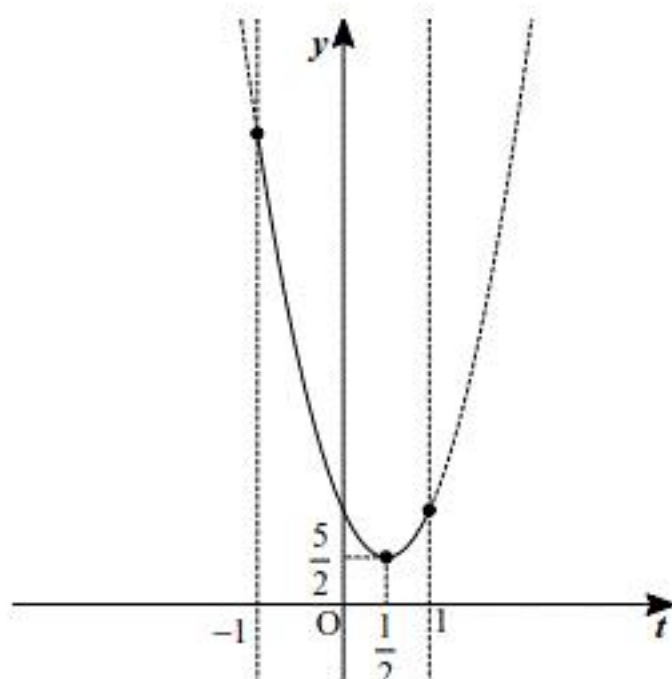
$$\vec{p} = (1-2t)\vec{a} + t\vec{b} = (1-2t) \cdot (-1, 2) + t \cdot (1, 3) = (3t-1, -t+2)$$

であるので、

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{(3t-1)^2 + (-t+2)^2} \\ &= \sqrt{10t^2 - 10t + 5} \\ &= \sqrt{10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $y = 10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ とすると、その値が最小のとき $|\vec{p}|$ も最小となる。 $-1 \leq t \leq$

1 において $y = 10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ のグラフは次のようになる。



よって、 $-1 \leq t \leq 1$ において、 $y = 10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ は $t = \frac{1}{2}$ で最小値 $\frac{5}{2}$ をとるので、 $|\vec{p}|$ は $t = \frac{1}{2}$

で最小値 $\sqrt{\frac{5}{2}}$ すなわち $\frac{\sqrt{10}}{2}$ をとる。

(答) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(2)

$y = 10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ が最大値をとるとき、 $|\vec{p}|$ も最大値をとる。(1)の図より、 $-1 \leq t \leq 1$ におい

て、 $y = 10\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ は $t = -1$ で最大値をとり、最大値は 25 である。よって $|\vec{p}|$ は $t = -1$ で最大値 5 をとる。

(答) 5

(3)

(1)より、 $|\vec{p}|$ の最小値を与える t は、 $t = \frac{1}{2}$ である。 $\vec{p}$ に $t = \frac{1}{2}$ を代入すると $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となり、

直線 OA の方程式は、

$$y = \frac{0-2}{0-(-1)}x + 0 = -2x$$

となる。よって、点 M と直線 OA との距離を d とすると、点と直線の距離の公式から、

$$d = \frac{\left|2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} + 0\right|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(4)

点 M から直線 OA に下ろした垂線の足を H とおくと、MH の長さは点 M と直線 OA との距離 d に等しい。よって、 $OA = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ より、

$$\triangle OMA = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}$$

となる。

(答) $\frac{5}{4}$

Ⅲ

(1)

方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が 3 つの実数解 $1, \alpha, \beta$ をもつので、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x-1)(x-\alpha)(x-\beta) \\ \Leftrightarrow x^3 + ax^2 + bx + c &= x^3 - (\alpha + \beta + 1)x^2 + (\alpha\beta + \alpha + \beta)x - \alpha\beta \end{aligned}$$

となる。よって、恒等式から

$$\begin{cases} a = -\alpha - \beta - 1 \\ b = \alpha\beta + \alpha + \beta \\ c = -\alpha\beta \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a = -\alpha - \beta - 1 \\ b = \alpha\beta + \alpha + \beta \\ c = -\alpha\beta \end{cases}$$

(2)

2 次方程式 $3x^2 + 2ax + b = 0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= a^2 - 3b \\ &= (-\alpha - \beta - 1)^2 - 3(\alpha\beta + \alpha + \beta) \\ &= \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 - \alpha - \beta + 1 \\ &= \left(\alpha - \frac{\beta+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(\beta-1)^2 \end{aligned}$$

となる。 $1 < \beta$ であることから、 $\left(\alpha - \frac{\beta+1}{2}\right)^2 \geq 0$ かつ $(\beta-1)^2 > 0$ であるので

$\left(\alpha - \frac{\beta+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(\beta-1)^2 > 0$ である。よって

$$\frac{D}{4} = \left(\alpha - \frac{\beta+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(\beta-1)^2 > 0$$

となり、判別式 D が正の値をとるので、2 次方程式 $3x^2 + 2ax + b = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

(証明終)

(2)[別解]

$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

とおくと、題意より、 $g(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ。このとき、

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

であり、 $g'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもたないとすると、 $g'(x) \geq 0$ であり、 $g'(x) = 0$ となる x は高々 1 個である。よって、 $g(x)$ は単調増加であり、 $g(x) = 0$ は実数解を 1 つしか持たず、 $g(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつことに矛盾する。したがって、 $g'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

(証明終)

(3)

任意定数を C とすると、

$$\int f'(x) dx = \int \{3x^2 + (4a-2)x + 4b+3\} dx = x^3 + (2a-1)x^2 + (4b+3)x + C$$

であるから、 $f(x)$ は定数 d を用いて

$$f(x) = x^3 + (2a-1)x^2 + (4b+3)x + d$$

と表せる。 $f(1) = 0$ より

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= -2a - 4b - 3 \end{aligned}$$

となるので、

$$f(x) = x^3 + (2a-1)x^2 + (4b+3)x - 2a - 4b - 3 = (x-1)(x^2 + 2ax + 2a + 4b + 3)$$

となる。ここで、 $a = -\alpha - \beta - 1, b = \alpha\beta + \alpha + \beta$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2 + 2ax + 2a + 4b + 3) \\ &= (x-1)\{x^2 - 2(\alpha + \beta + 1)x + 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1\} \\ &= (x-1)(x-2\alpha-1)(x-2\beta-1) \end{aligned}$$

となる。よって $f(x) = 0$ の解は $x = 1, 2\alpha+1, 2\beta+1$ である。

$$(答) f(x) = x^3 + (2a-1)x^2 + (4b+3)x - 2a - 4b - 3, f(x) = 0 \text{ の解 } x = 1, 2\alpha+1, 2\beta+1$$