

I

(1)

$$f(n) = a_0 + a_1 n + \frac{a_2}{2} n(n-1)$$

である。 k を整数とすると $n=2k$ と表せるとき $n(n-1)=2k(2k-1)$ であり、 $n=2k+1$ と表せるとき $n(n-1)=2k(2k+1)$ となるので $n(n-1)$ は偶数であり、 $\frac{1}{2}n(n-1)$ は整数となる。したがって、 $f(n) = a_0 + a_1 n + \frac{a_2}{2} n(n-1)$ の右辺の各項はすべて整数であるから、 $f(n)$ が整数となることが示された。

(証明終)

(2)

$$f(n+1) - f(n) = a_1 + a_2 n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(n+2) - f(n+1) = a_1 + a_2 (n+1) \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、②-①より、

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = a_2 \quad \dots \textcircled{3}$$

が得られる。問題文の条件より、③の左辺は整数であるから、 a_2 は整数であることが示された。このとき、①より、

$$f(n+1) - f(n) - a_2 n = a_1$$

であり、ここで、 $a_2 n$ は整数であるから、問題文の条件と合わせて、 a_1 が整数であることが示された。最後に、

$$f(n) = a_0 + a_1 n + \frac{a_2}{2} n(n-1)$$

$$\therefore f(n) - a_1 n - \frac{a_2}{2} n(n-1) = a_0$$

であり、 $n(n-1)$ は偶数であるので $\frac{1}{2}n(n-1)$ は整数となり、 a_0 が整数であることも示された。

(証明終)

II

(1)

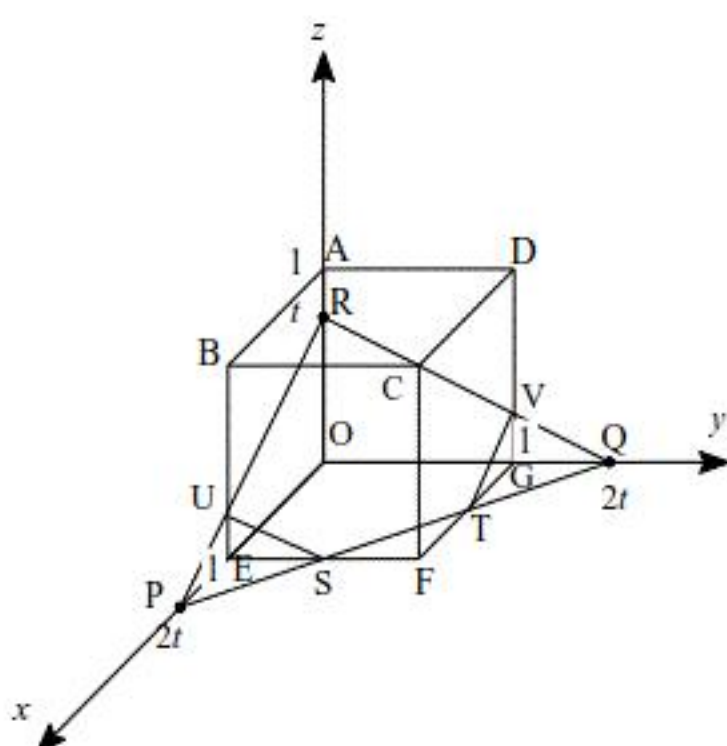
$\triangle ABC$ の面積を S とする。このとき S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sqrt{1 - \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{AC}| \sqrt{\frac{(|\overline{AB}| |\overline{AC}|)^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}{(|\overline{AB}| |\overline{AC}|)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$$

(2)



図のように、線分 PQ と線分 EF, FG との交点を順に S, T 、線分 RP と線分 BE の交点を U 、線分 QR と線分 GD の交点を V とする。切り口は五角形 $RUSTV$ である。

まず、 $\triangle PQR$ の面積を求める。

$$\begin{aligned} \overline{RP} &= (2t, 0, -t) \\ \overline{RQ} &= (0, 2t, -t) \end{aligned}$$

である。 $|\overline{RP}| = \sqrt{5}t$, $|\overline{RQ}| = \sqrt{5}t$, $\overline{RP} \cdot \overline{RQ} = t^2$ となるから、(1)より、

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{5t^2 \cdot 5t^2 - t^4} = \sqrt{6}t^2$$

である。

次に、 $\triangle PQR$ と $\triangle PSU$ と $\triangle TQV$ が相似であることを示し、その相似比を求める。 $UE \parallel RO$ 、 $VG \parallel RO$ より $\triangle PUE$ と $\triangle PRO$ 、 $\triangle QVG$ と $\triangle QRO$ は相似である。ゆえに

$$\begin{aligned} PU : UR &= PE : EO = 2t - 1 : 1 \\ QV : VR &= QG : GO = 2t - 1 : 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $QR \parallel SU$ より $\angle PQR = \angle PSU$ であり、 $RP \parallel VT$ より $\angle RPQ = \angle VTQ$ である。また、 $\angle RPQ = \angle UPS$, $\angle PQR = \angle TQV$ より $\triangle PQR$ と $\triangle PSU$ と $\triangle TQV$ は相似である。このとき、 $PU : PR = QV : QR = 2t - 1 : 2t$ より

$$\triangle PQR : \triangle PSU : \triangle TQV = (2t)^2 : (2t - 1)^2 : (2t - 1)^2$$

であり、

$$\text{五角形 } RUSTV = \triangle PQR - \triangle PSU - \triangle TQV$$

と表されるので

$$\text{五角形 } RUSTV : \triangle PQR = (-4t^2 + 8t - 2) : 4t^2$$

となる。

以上より、切り口の面積を S とすると、

$$S = \sqrt{6}t^2 \cdot \frac{-4t^2 + 8t - 2}{4t^2} = -\sqrt{6}t^2 + 2\sqrt{6}t - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{6}t^2 + 2\sqrt{6}t - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Ⅲ

(1)

$y' = 3x^2 + a$ であるから、 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3p^2 + a)(x - p) + p^3 + ap + b \\ &= (3p^2 + a)x - 2p^3 + b \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3p^2 + a)x - 2p^3 + b$$

(2)

C と l の方程式を連立して、交点の x 座標を求める。2 つの方程式から、 y を消去すると、

$$\begin{aligned} x^3 + ax + b &= (3p^2 + a)x - 2p^3 + b \\ \therefore x^3 - 3p^2x + 2p^3 &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。この方程式は $x = p$ を重解としてもつことに注意して変形すると、

$$(x - p)^2(x + 2p) = 0$$

が得られるので、 $q = -2p$ であると分かる。したがって、

$$d = |p - q| = 3|p|$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d = 3|p|$$

(3)

関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax + b - \{(3p^2 + a)x - 2p^3 + b\} \\ &= (x - p)^2(x + 2p) \end{aligned}$$

とおき、求める面積を S とする。以下、 p の符号によって場合分けをして考える。

[1] $p = 0$ のとき

$-2p = p = 0$ であるから、 $f(x) = x^3$ となる。したがって、曲線 C と直線 l で囲まれた部分は存在しない。

[2] $p > 0$ のとき

$-2p \leq x \leq p$ のとき、 $f(x) \geq 0$ となるから、曲線 C と直線 l の上下関係は以下の表のようになる。

x	...	$-2p$	...	p	...
位置関係	l の方が上	交わる	C の方が上	交わる	l の方が上

したがって、曲線 C と直線 l で囲まれた面積 S は

$$S = \int_{-2p}^p f(x) dx$$

と立式できる。

[3] $p < 0$ のとき

$p \leq x \leq -2p$ のとき、 $f(x) \leq 0$ となるから、曲線 C と直線 l の上下関係は以下の表のようになる。

x	...	p	...	$-2p$	...
位置関係	C の方が上	交わる	l の方が上	交わる	C の方が上

したがって、曲線 C と直線 l で囲まれた面積 S は

$$S = \int_p^{-2p} -f(x) dx = \int_{-2p}^p f(x) dx$$

と立式できる。

以上[1], [2], [3]より、 $p \neq 0$ のとき、 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2p}^p f(x) dx \\ &= \int_{-2p}^p (x - p + 3p)(x - p)^2 dx \\ &= \int_{-2p}^p \{(x - p)^3 + 3p(x - p)^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x - p)^4 - \frac{1}{3}(-3p)(x - p)^3 \right]_{-2p}^p \\ &= 0 - \left\{ \frac{1}{4}(-3p)^4 - \frac{1}{3}(-3p)^4 \right\} \\ &= \frac{1}{12} \cdot (3p)^4 \\ &= \frac{1}{12} d^4 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12} d^4 \quad (p \neq 0)$$