

I

【解答】

|     |                                           |     |                                                  |
|-----|-------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------|
| (1) | $\sqrt[3]{a}$                             | (4) | $x=\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi$ |
| (2) | $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ | (5) | $\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}$          |
| (3) | $a_n=(-2)^{n-1}+1$                        | (6) | $f(x)=x^2-2x+3$                                  |

【解説】

(1)

与式は、 $a>0, b>0$  に注意すると、

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^4b^3}\cdot\sqrt[3]{a^3b^2}\cdot\left(a^2\sqrt[3]{b^5}\right)^{-1}&=a^{\frac{4}{3}}b\cdot ab^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-2}b^{-\frac{5}{3}}\\&=a^{\frac{1}{3}}\\&=\sqrt[3]{a}\end{aligned}$$

と変形できる。

(2)

与式を変形すると、

$$y=2x^2+x-1=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$$

となるから、頂点の座標は $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ である。

(3)

与えられた漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=-2a_n+3\\ \Leftrightarrow a_{n+1}-1&=-2(a_n-1)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $a_1-1=2-1=1$  より、数列 $\{a_n-1\}$ は初項1、公比 $-2$ の等比数列であるから、その一般項は、

$$a_n-1=(-2)^{n-1}$$

となる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$a_n=(-2)^{n-1}+1$$

である。

(4)

倍角の公式を用いると、

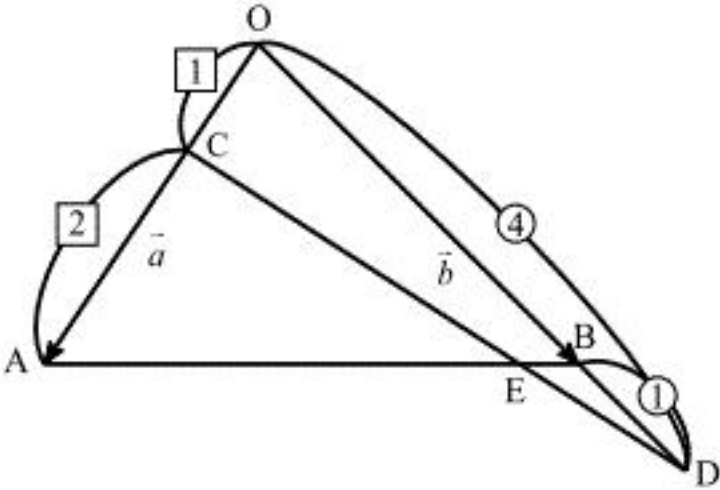
$$\begin{aligned}\sin 2x&=\sqrt{3}\cos x\\ \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x&=0\\ \Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)&=0\\ \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ または }\cos x&=0\end{aligned}$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0\leq x<\pi)$$

が得られる。

(5)

以下に△OABおよび点C, D, Eを図示する。



上図より、メネラウスの定理を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{OD}{DB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AC}{CO}&=1\\ \Leftrightarrow \frac{4}{1}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{2}{1}&=1\\ \Leftrightarrow \frac{BE}{EA}&=\frac{1}{8}\\ \therefore BE:EA&=1:8\end{aligned}$$

が得られる。これより、

$$\overrightarrow{AE}=\frac{8}{9}\overrightarrow{AB}=-\frac{8}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\vec{b}$$

となる。

(6)

$f(x)$ は2次関数であるから、実数 $a, b, c$ を用いて、

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}f(0)&=3\\ \therefore c&=3\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1f(x)dx&=\frac{20}{3}\\ \Leftrightarrow \int_{-1}^1(ax^2+bx+3)dx&=\frac{20}{3}\\ \Leftrightarrow \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+3x\right]_{-1}^1&=\frac{20}{3}\\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}a+6&=\frac{20}{3}\\ \therefore a&=1\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}f'(1)&=0\\ \Leftrightarrow 2a+b&=0\\ \therefore b&=-2\end{aligned}$$

であるから、求める2次関数は、

$$f(x)=x^2-2x+3$$

となる。

## II

(1)

1個のさいころを $n$ 回投げるとき、3の目が少なくとも1回出るという事象の余事象は、「1個のさいころを $n$ 回振って、3の目が1回も出ない」という事象である。この事象が起こる確率は、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

であるから、求める確率は、

$$p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)

1個のさいころを100回投げるとき、奇数の目が少なくとも1回出る確率 $q$ は、(1)と同様に考えると、

$$q = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

である。いま、 $p_n \geq q$ が成り立つとき、

$$p_n \geq q$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{100} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。①の両辺の常用対数をとると、

$$n \log_{10} \frac{5}{6} \leq -100 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n \log_{10} \frac{10}{12} \leq -100 \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-100 \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{10}{12}} \left( \because \log_{10} \frac{10}{12} < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-100 \log_{10} 2}{1 - 2 \log_{10} 2 - \log_{10} 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-100 \cdot 0.3010}{1 - 2 \cdot 0.3010 - 0.4771}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{30.1}{0.0791} = 380.5 \cdots$$

が得られる。したがって、 $p_n \geq q$ が成り立つような最も小さい自然数 $n$ の値は381である。

(答) 381

### III

(1)

$f(x)$  の導関数は,

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

である。 $f(x)$  が  $-2 \leq x \leq 2$  の範囲で極値をとらない必要十分条件は、2 次方程式  $f'(x) = 0$  が  $-2 \leq x \leq 2$  の範囲で解をもたない、または重解をもつことである。したがって、求める  $a$  の値の範囲は,

$$2 < a \quad (\because a > 0)$$

である。 $2 < a$  のとき、 $-2 \leq x \leq 2$  の範囲で,

$$f'(x) = 3(x+a)(x-a) < 0$$

であるから、 $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$  において  $f(x_1) > f(x_2)$  が成り立つ。したがって、最大値は  $f(-2) = 6a^2 - 8$  であり、最小値は  $f(2) = -6a^2 + 8$  である。

(答)  $a$  の値の範囲:  $2 < a$

最大値:  $x = -2$  のとき  $6a^2 - 8$

最小値:  $x = 2$  のとき  $8 - 6a^2$

(2)

(1)より、 $0 < a \leq 2$  である。このとき  $f'(x) = 0$  を満たす  $x$  は、 $x = \pm a$  ( $-a < a$ ) であるから、増減表は以下ようになる。

|         |            |            |        |            |         |            |             |
|---------|------------|------------|--------|------------|---------|------------|-------------|
| $x$     | $-2$       | $\cdots$   | $-a$   | $\cdots$   | $a$     | $\cdots$   | $2$         |
| $f'(x)$ |            | $+$        | $0$    | $-$        | $0$     | $+$        |             |
| $f(x)$  | $6a^2 - 8$ | $\nearrow$ | $2a^3$ | $\searrow$ | $-2a^3$ | $\nearrow$ | $-6a^2 + 8$ |

ここで、 $2a^3$  と  $-6a^2 + 8$  の大きさを比較すると,

$$\begin{aligned} 2a^3 - (-6a^2 + 8) &= 2(a^3 + 3a^2 - 4) \\ &= 2(a-1)(a^2 + 4a + 4) \\ &= 2(a-1)(a+2)^2 \end{aligned}$$

となるから,

$$0 < a < 1 \text{ のとき, } 2a^3 < -6a^2 + 8$$

$$1 \leq a \leq 2 \text{ のとき, } 2a^3 \geq -6a^2 + 8$$

が成り立つ。以上より,

$$\begin{cases} \text{最大値: } -6a^2 + 8, \text{ 最小値: } 6a^2 - 8 & (0 < a < 1) \\ \text{最大値: } 2a^3, \text{ 最小値: } -2a^3 & (1 \leq a \leq 2) \end{cases}$$

となる。

(答)  $0 < a < 1$  のとき:  $x = 2$  のとき最大値  $-6a^2 + 8$

$x = -2$  のとき最小値  $6a^2 - 8$

$1 \leq a \leq 2$  のとき:  $x = -a$  のとき最大値  $2a^3$

$x = a$  のとき最小値  $-2a^3$