

I

〔解答〕

(1)	$2i$	(4)	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
(2)	12600 通り	(5)	$y = -2x + 2$
(3)	$\frac{1}{9}$	(6)	$\frac{1}{2}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\frac{6+i}{2+i} + \frac{3+8i}{1-2i} &= \frac{(6+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} + \frac{(3+8i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{13-4i}{5} + \frac{-13+14i}{5} \\ &= 2i\end{aligned}$$

となる。

(2)

2つのH, 3つのU, 4つのOはそれぞれ区別しないことに注意すると,

$$\begin{aligned}\frac{10!}{2!3!4!} &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 12600\end{aligned}$$

であることより, 12600 通りとなる。

(3)

$$4^{-\log_2 3} = 2^{-2\log_2 3} = 2^{-\log_2 3^2} = \frac{1}{9}$$

であるので, $\frac{1}{9}$ である。

(4)

$$\begin{aligned}2\cos^2 x - 5\sin x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin^2 x - 5\sin x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 3) &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで, $-1 \leq \sin x \leq 1$ より, $\sin x = \frac{1}{2}$ となる。したがって, $0 \leq x < 2\pi$ より,

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ である。}$$

(5)

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 6x + 1 \text{ より,} \\ f'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

である。したがって, 点 $(-1, f(-1))$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned}y - f(-1) &= f'(-1)\{x - (-1)\} \\ \Leftrightarrow y - \{(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 3\} &= (-2) \cdot (x + 1) \\ \Leftrightarrow y - 4 &= -2x - 2 \\ \therefore y &= -2x + 2\end{aligned}$$

となる。

(6)

$x < 1$ で $|x-1| = -(x-1)$, $x \geq 1$ で $|x-1| = x-1$ であることから,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (1 - |x-1|) dx &= \int_{-1}^1 (1 + x - 1) dx + \int_1^2 (1 - x + 1) dx \\ &= \int_{-1}^1 x dx + \int_1^2 (-x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= 0 + (-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

II

(1)

$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ に $x = k, k+1$ を代入して計算する。

$$\begin{aligned} P(k+1) - P(k) &= (k+1)^4 + a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) - (k^4 + ak^3 + bk^2 + ck) \\ &= 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 3ak^2 + 3ak + a + 2bk + b + c \\ &= 4k^3 + (3a+6)k^2 + (3a+2b+4)k + (a+b+c+1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(k+1) - P(k) = 4k^3 + (3a+6)k^2 + (3a+2b+4)k + (a+b+c+1)$$

(2)

すべての k に対して $P(k+1) - P(k) = 4k^3$ が成立するとき、

$$4k^3 + (3a+6)k^2 + (3a+2b+4)k + (a+b+c+1) = 4k^3$$

が k についての恒等式となる。係数比較をすると、

$$\begin{cases} 3a+6=0 & \cdots \textcircled{1} \\ 3a+2b+4=0 & \cdots \textcircled{2} \\ a+b+c+1=0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。①より、 $a = -2$ である。これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} -6 + 2b + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 1 \end{aligned}$$

である。これらを③に代入すると、

$$\begin{aligned} -2 + 1 + c + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -2, b = 1, c = 0$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 \\ &= x^2(x-1)^2 \end{aligned}$$

とおくと、 $f(k+1) - f(k) = 4k^3$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \\ &= \frac{1}{4} [\{f(2) - f(1)\} + \{f(3) - f(2)\} + \{f(4) - f(3)\} + \cdots + \{f(n+1) - f(n)\}] \\ &= \frac{1}{4} \{f(n+1) - f(1)\} \\ &= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

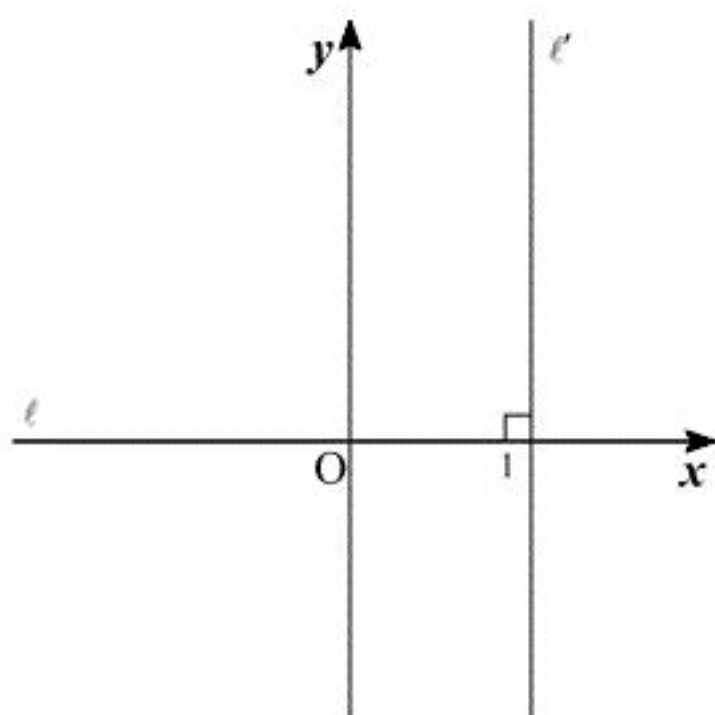
Ⅲ

(1)

$m \neq 0$ のとき、 $\ell \perp \ell'$ より、 ℓ' の傾きは $-\frac{1}{m}$ である。したがって、 ℓ' の方程式は、

$$\begin{aligned} y-0 &= -\frac{1}{m}(x-1) \\ \Leftrightarrow x+my-1 &= 0 \end{aligned}$$

である。また、 $m=0$ のとき、以下のような図を得る。



したがって、 $m=0$ のとき ℓ' の方程式は $x=1$ となる。これは、 $x+my-1=0$ に $m=0$ を代入したものと等しい。よって、直線 ℓ' の方程式は、 $x+my-1=0$ である。

(答) $x+my-1=0$

(2)

点 P の x, y 座標は

$$\begin{cases} y=mx & \dots \textcircled{1} \\ x+my-1=0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす。したがって、2 式から y を消去すると、

$$\begin{aligned} x+m \cdot mx-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m^2+1)x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{m^2+1} \quad (\because m^2+1 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると、 $y = \frac{m}{m^2+1}$ となる。よって、点 P の座標は $\left(\frac{1}{m^2+1}, \frac{m}{m^2+1}\right)$ となる。

(答) $\left(\frac{1}{m^2+1}, \frac{m}{m^2+1}\right)$

(3)

点 P(X, Y) とおく。このとき、 $X = \frac{1}{m^2+1}$, $Y = \frac{m}{m^2+1}$ である。ただし、 $X \neq 0$ である。ここで、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{m}{m^2+1}\right)^2 &= \frac{m^2+1}{(m^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{m^2+1} \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned} X^2+Y^2 &= X \\ \Leftrightarrow X^2-X+Y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X-\frac{1}{2}\right)^2+Y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これは、点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の円周を表す。ただし、 $X \neq 0$ であること

から、原点 $(0, 0)$ を除く。逆に、点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の円周上の原点を除く任意

の点(X, Y)について、 $m = \frac{Y}{X}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2+1} &= \frac{1}{\left(\frac{Y}{X}\right)^2+1} = \frac{X^2}{X^2+Y^2} = \frac{X^2}{X} = X \\ \frac{m}{m^2+1} &= mX = Y \end{aligned}$$

となり、点(X, Y)は条件を満たす。以上より、点 P の軌跡は点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の円周である。ただし、原点を除く。

(答) 点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の円周(原点を除く)