

2018 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類がありますので注意してください。
2. 解答は、必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となりますので注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。
6. マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないよう特に注意してください。
7. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

O を原点とする座標空間において、6 個の点

$$A(0,0,1), \quad B(1,0,0), \quad C(0,1,0), \quad D(-1,0,0), \quad E(0,-1,0), \quad F(0,0,-1)$$

を頂点とする正八面体を考える。 $\triangle ABC$ の重心を G 、 $\triangle ACD$ の重心を H とすると、線分 OG の長さは ア であり、 $\cos \angle GOH =$ イ である。また、正八面体 $ABCDEF$ の各面の重心を頂点とする正多面体は ウ である。

次に、この正八面体を回転と平行移動によって空間の中で動かし、頂点 A, B, C, D, E, F がそれぞれ点 A', B', C', D', E', F' に、 G が G' に移ったとする。ただし、移動後の正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ は以下の3条件を満たすものとする。

- (1) 点 G' は原点 O である。
- (2) 3 頂点 A', B', C' の z 座標は 0 である。 A' は y 座標も 0 で、 x 座標は正である。
- (3) 3 頂点 D', E', F' の z 座標はすべて正である。

このとき、3 点 D', E', F' の座標は、それぞれ

$$\begin{aligned} D' & \left(\text{エ}, \text{オ}, \text{カ} \right), \\ E' & \left(\text{エ}, \text{キ}, \text{カ} \right), \\ F' & \left(\text{ク}, 0, \text{カ} \right) \end{aligned}$$

である。正八面体 $A'B'C'D'E'F'$ を真上の z 軸方向から見ると、その輪郭は正六角形であり、 x 軸方向から見た輪郭は ケ , y 軸方向から見た輪郭は コ である。

問題Ⅰのア、イ、エ、オ、カ、キ、クの解答群

- | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Ⓐ $-\sqrt{2}$ | Ⓑ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ | Ⓒ -1 | Ⓓ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | Ⓔ $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ |
| Ⓕ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | Ⓖ $-\frac{2}{3}$ | Ⓗ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | Ⓘ $-\frac{1}{2}$ | Ⓙ $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ |
| Ⓚ $-\frac{1}{3}$ | Ⓛ 0 | Ⓜ $\frac{1}{3}$ | Ⓝ $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | Ⓞ $\frac{1}{2}$ |
| Ⓟ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | Ⓢ $\frac{2}{3}$ | Ⓡ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | Ⓢ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ | Ⓣ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| Ⓤ 1 | Ⓥ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ | Ⓦ $\sqrt{2}$ | | |

問題Ⅰのウの解答群

- Ⓐ 正四面体 Ⓑ 正六面体 Ⓒ 正八面体 Ⓓ 正十二面体
Ⓔ 正二十面体

問題Ⅰのケ、コの解答群

- Ⓐ 正三角形 Ⓑ 直角二等辺三角形 Ⓒ 正方形
Ⓓ 正方形でない長方形 Ⓔ 正方形でないひし形 Ⓕ 正六角形
Ⓖ 正六角形でない六角形 Ⓖ 正八角形

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

自然数 n を限りなく大きくするとき、定積分 $\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx$ と $\int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx$ がどのような値に近づくかを調べる。まず、部分積分法を用いると

$$\int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx = \boxed{\text{サ}} \int_0^1 \frac{\boxed{\text{シ}}}{(1+x)^2} dx$$

である。右辺の絶対値について、被積分関数の絶対値は1以下であるから、

$$\boxed{\text{サ}} \left| \int_0^1 \frac{\boxed{\text{シ}}}{(1+x)^2} dx \right| \leq \boxed{\text{サ}}$$

が成り立ち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{1+x} dx = \boxed{\text{ス}}$$

が得られる。

次に、 $k = 1, 2, \dots, n$ とする。 $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ のとき

$$\frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k}{n}} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} \leq \frac{|\cos n\pi x|}{1 + \frac{k-1}{n}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

である。ここで、

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\cos n\pi x| dx = \boxed{\text{セ}}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ の各辺を $x = \frac{k-1}{n}$ から $x = \frac{k}{n}$ まで積分し、 k について1から n までの和をとれば、

$$\sum_{k=1}^n \frac{\boxed{\text{セ}}}{1 + \frac{k}{n}} \leq \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{\boxed{\text{セ}}}{1 + \frac{k-1}{n}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $\textcircled{2}$ において $n \rightarrow \infty$ とすると、左辺と右辺はともに

$$\int_0^1 \boxed{\text{ソ}} dx$$

に収束する。この値を計算して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\cos n\pi x|}{1+x} dx = \boxed{\text{タ}}$$

が得られる。

問題 II のサ、セの解答群

- | | | | | | |
|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------|-----------|
| Ⓐ $\frac{1}{2n}$ | Ⓑ $\frac{1}{n}$ | Ⓒ $\frac{2}{n}$ | Ⓓ $\frac{1}{2}$ | Ⓔ 1 | Ⓕ 2 |
| Ⓖ $\frac{1}{2\pi}$ | Ⓗ $\frac{1}{\pi}$ | Ⓘ $\frac{2}{\pi}$ | Ⓙ $\frac{\pi}{2}$ | Ⓚ π | Ⓛ 2π |
| Ⓜ $\frac{1}{2n\pi}$ | Ⓝ $\frac{1}{n\pi}$ | Ⓨ $\frac{2}{n\pi}$ | Ⓟ $\frac{n\pi}{2}$ | Ⓠ $n\pi$ | Ⓡ $2n\pi$ |

問題 II のシの解答群

- | | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| Ⓐ $\sin n\pi x$ | Ⓑ $-\sin n\pi x$ | Ⓒ $\cos n\pi x$ | Ⓓ $-\cos n\pi x$ |
| Ⓔ $x \sin n\pi x$ | Ⓕ $-x \sin n\pi x$ | Ⓖ $x \cos n\pi x$ | Ⓗ $-x \cos n\pi x$ |

問題 II のス、タの解答群

- | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| Ⓐ 0 | Ⓑ 1 | Ⓒ $\frac{\log 2}{2}$ | Ⓓ $\log 2$ |
| Ⓔ $2 \log 2$ | Ⓕ $\frac{\log 2}{2\pi}$ | Ⓖ $\frac{\log 2}{\pi}$ | Ⓗ $\frac{2 \log 2}{\pi}$ |
| Ⓘ $\frac{\pi \log 2}{2}$ | Ⓙ $\pi \log 2$ | Ⓚ $2\pi \log 2$ | Ⓛ $\frac{1 - \log 2}{2}$ |
| Ⓜ $1 - \log 2$ | Ⓝ $2(1 - \log 2)$ | Ⓨ $\frac{1 - \log 2}{2\pi}$ | Ⓟ $\frac{1 - \log 2}{\pi}$ |
| Ⓠ $\frac{2(1 - \log 2)}{\pi}$ | Ⓡ $\frac{\pi(1 - \log 2)}{2}$ | Ⓢ $\pi(1 - \log 2)$ | Ⓣ $2\pi(1 - \log 2)$ |
| Ⓤ ∞ | | | |

問題 II のソの解答群

- | | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| Ⓐ $\frac{1}{2(1+x)}$ | Ⓑ $\frac{1}{1+x}$ | Ⓒ $\frac{2}{1+x}$ | Ⓓ $\frac{1}{2\pi(1+x)}$ |
| Ⓔ $\frac{1}{\pi(1+x)}$ | Ⓕ $\frac{2}{\pi(1+x)}$ | Ⓖ $\frac{\pi}{2(1+x)}$ | Ⓗ $\frac{\pi}{1+x}$ |
| Ⓘ $\frac{2\pi}{1+x}$ | Ⓙ $\frac{x}{2(1+x)}$ | Ⓚ $\frac{x}{1+x}$ | Ⓛ $\frac{2x}{1+x}$ |
| Ⓜ $\frac{x}{2\pi(1+x)}$ | Ⓝ $\frac{x}{\pi(1+x)}$ | Ⓨ $\frac{2x}{\pi(1+x)}$ | Ⓟ $\frac{\pi x}{2(1+x)}$ |
| Ⓠ $\frac{\pi x}{1+x}$ | Ⓡ $\frac{2\pi x}{1+x}$ | | |

(設問は次のページにつづく)

III O を原点とする座標平面において、3 次関数 $y = x^3 - 3x$ のグラフを C とする。
 C 上の点 $P(a, a^3 - 3a)$ を通り、傾き k の直線を ℓ とする。ただし、 a は $a > 1$ を満たす定数である。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) C と ℓ が相異なる 3 点で交わるための k の条件を求めよ。
- (2) C と ℓ が相異なる 3 点で交わり、さらに P 以外の交点 $Q(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ (ただし $x_1 < x_2$) の x 座標 x_1, x_2 がともに負になるような k の値の範囲を求めよ。

以下では $a = \sqrt{3}$ とし、 k は (2) で求めた範囲を動くものとする。

- (3) $\triangle OQR$ の面積 S を k で表せ。
- (4) S の最大値を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV $f(x) = e^x$ とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) a を実数とする。2 次関数 $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ が

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a), \quad g''(a) = f''(a)$$

をすべて満たすとき、 A, B, C を a で表せ。

- (2) 一般に、放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標は $\left(-\frac{B}{2A}, \frac{1-B^2}{4A} + C\right)$ で与えられる。 A, B, C を (1) で求めたとおりとするとき、放物線 $y = Ax^2 + Bx + C$ の焦点 F の座標を a で表せ。

- (3) (2) で求めた焦点 F と点 $R(a, e^a)$ を結ぶ線分 FR の傾きが $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ となる a の値を p とし、 FR の傾きが 0 となる a の値を q とする。 p と q を求めよ。

- (4) p と q を (3) のとおりとする。 a が $p \leq a \leq q$ の範囲を動くとき、焦点 F が描く曲線の長さを求めよ。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)



1
2
3
4



(