

I

(1)

$$\begin{cases} 7x^2 + 10y^2 = 2800 \\ y = a(x+20) \end{cases}$$

楕円 $C: 7x^2 + 10y^2 = 2800$ と直線 $\ell_a: y = a(x+20)$ の2つの方程式を連立し、 y を消去すると、

$$\begin{aligned} 7x^2 + 10\{a(x+20)\}^2 &= 2800 \\ \Leftrightarrow 7(x^2 - 400) + 10a^2(x+20)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7(x+20)(x-20) + 10a^2(x+20)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+20)\{(10a^2+7)x + 20(10a^2-7)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow (10a^2+7)(x+20)\left\{x + \frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7}\right\} &= 0 \\ \therefore x = -20, -\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7} = -20\left(1 - \frac{14}{10a^2+7}\right) \neq -20$$

であるから、楕円 C と直線 ℓ_a は異なる2つの交点を持つ。交点の1つは $P(-20, 0)$ であり、も

う一方を R_a とすると、 R_a の x 座標は $-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7}$ であるから、 y 座標は

$$\begin{aligned} y &= a\left\{-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7} + 20\right\} \\ &= \frac{280a}{10a^2+7} \end{aligned}$$

となる。よって、求める交点は $P(-20, 0), R_a\left(-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7}, \frac{280a}{10a^2+7}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad (-20, 0), \left(-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7}, \frac{280a}{10a^2+7}\right)$$

(2)

(1)より、任意の有理数 a に対して P とは異なる C の有理点 $R_a\left(-\frac{20(10a^2-7)}{10a^2+7}, \frac{280a}{10a^2+7}\right)$ が定

まる。直線 PR_a は直線 ℓ_a に一致するから、その傾きは a である。よって、 a が異なれば直線 PR_a も異なり、したがって点 R_a も異なる。有理数 a は無数に存在するから、異なる有理点 R_a も無数に存在する。

(証明終)

(3)

$$7x^2 + 10y^2 = 2800 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす整数の組 (x, y) を考える。①を変形すると、

$$\begin{aligned} 7x^2 + 10y^2 &= 2800 \\ \Leftrightarrow 7x^2 &= 10(280 - y^2) \end{aligned}$$

であり、7と10は互いに素であるから、 x^2 は10の倍数となる必要がある。ここで $10y^2 \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq 7x^2 \leq 2800 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 \leq 400 \\ \Leftrightarrow -20 &\leq x \leq 20 \end{aligned}$$

となるから、この範囲で x^2 が10の倍数となるような x は $x=0, \pm 10, \pm 20$ に限られる。以下、 x の値によって場合分けし、整数 y を求める。

[1] $x=0$ のとき

①より、 $10y^2 = 2800 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{70}$ となり、 y が整数とならないので不適である。

[2] $x=\pm 10$ のとき

①より、 $7 \cdot 10^2 + 10y^2 = 2800 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{210}$ となり、 y が整数とならないので不適である。

[3] $x=\pm 20$ のとき

①より、 $7 \cdot 20^2 + 10y^2 = 2800 \Leftrightarrow y = 0$ となり、 y が整数となる。このとき、
 $(x, y) = (-20, 0), (20, 0)$ となる。

以上[1], [2], [3]より、 C の整数点は $P(-20, 0), Q(20, 0)$ のみである。

(証明終)

II

(1)

$z = a + ti$ のとき、

$$w = z^2 = (a^2 - t^2) + 2ati$$

である。実数 x, y に対し、

$x + yi$ が曲線 C_a 上にある

$$\Leftrightarrow x + yi = (a^2 - t^2) + 2ati \text{ となる実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 - t^2 \\ y = 2at \end{cases} \text{ となる実数 } t \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{y^2}{4a^2} + a^2 \\ t = \frac{y}{2a} \end{cases} \text{ となる実数 } t \text{ が存在する } (\because a > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{y^2}{4a^2} + a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから、曲線 C_a 上の点を $w = x + yi$ により表すと、 x, y は①を満たす。また、 $z = s + bi$ のとき、

$$w = z^2 = (s^2 - b^2) + 2bsi$$

である。実数 x, y に対し、

$x + yi$ が曲線 D_b 上にある

$$\Leftrightarrow x + yi = (s^2 - b^2) + 2bsi \text{ となる実数 } s \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = s^2 - b^2 \\ y = 2bs \end{cases} \text{ となる実数 } s \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4b^2} - b^2 \\ s = \frac{y}{2b} \end{cases} \text{ となる実数 } s \text{ が存在する } (\because b > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4b^2} - b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、曲線 D_b 上の点を $w = x + yi$ により表すと、 x, y は②を満たす。①、②より、2つの方程式の交点の y 座標は、 x を消去して、

$$\begin{aligned} -\frac{y^2}{4a^2} + a^2 &= \frac{y^2}{4b^2} - b^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} \right) y^2 &= a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{4a^2b^2} y^2 &= a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 4a^2b^2 \\ \therefore y &= \pm 2ab \end{aligned}$$

である。①に代入して x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{(\pm 2ab)^2}{4a^2} + a^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

となる。よって、 C_a と D_b の交点は、 $2ab > -2ab$ ($\because a, b > 0$) より、

$$w_1 = a^2 - b^2 + 2abi$$

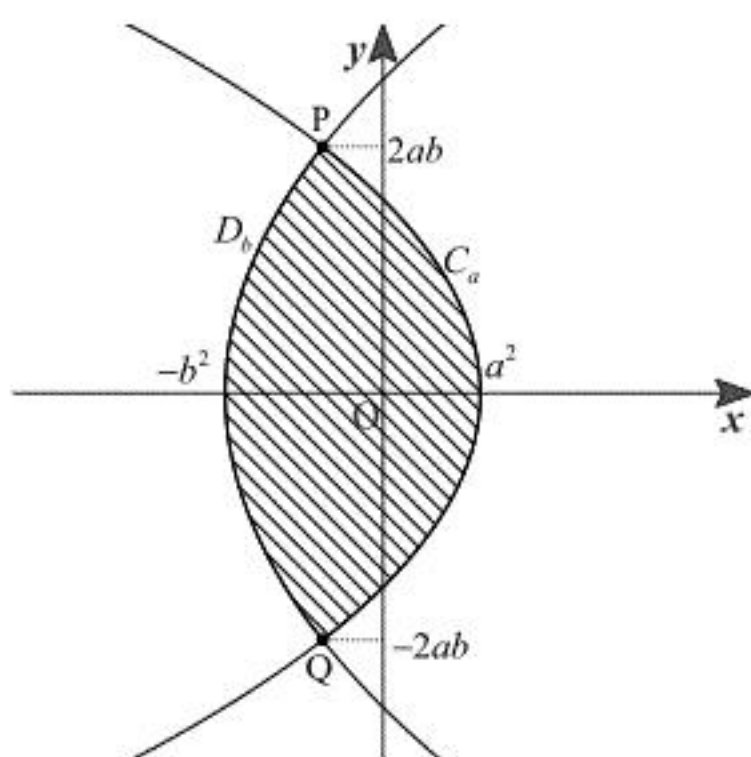
$$w_2 = a^2 - b^2 - 2abi$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad C_a: x = -\frac{y^2}{4a^2} + a^2, \quad D_b: x = \frac{y^2}{4b^2} - b^2, \quad P(w_1): a^2 - b^2 + 2abi, \quad Q(w_2): a^2 - b^2 - 2abi$$

(2)

①、②より、2つの放物線 C_a, D_b に囲まれた部分は以下の斜線部である。



上図より、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2ab}^{2ab} \left\{ \left(-\frac{y^2}{4a^2} + a^2 \right) - \left(\frac{y^2}{4b^2} - b^2 \right) \right\} dy \\ &= 2 \int_0^{2ab} \left(-\frac{a^2 + b^2}{4a^2b^2} y^2 + a^2 + b^2 \right) dy \\ &= 2 \left[-\frac{a^2 + b^2}{12a^2b^2} y^3 + (a^2 + b^2) y \right]_0^{2ab} \\ &= 2 \left\{ -\frac{2}{3} ab(a^2 + b^2) + 2ab(a^2 + b^2) \right\} \\ &= \frac{8}{3} ab(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{8}{3} ab(a^2 + b^2)$$

(3)

a, b が(*)を満たすことは、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ を用いて、

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta \quad \dots \textcircled{3}$$

とおけることと同値である。(1)より、

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \end{cases}$$

であるから、③を用いて

$$\begin{cases} x = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta \\ y = 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta \end{cases}$$

と変形できる。よって、 $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$ より、 x, y は

$$x^2 + y^2 = 1$$

をみたす。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 = 1$$

(4)

a, b が(*)を満たすとき、 $b = \sqrt{1 - a^2}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3} ab(a^2 + b^2) \\ &= \frac{8}{3} a\sqrt{1 - a^2} \end{aligned}$$

である。また、③より、

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3} \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{4}{3} \sin 2\theta \end{aligned}$$

と変形できる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において、 $0 < \sin 2\theta \leq 1$ であるから、求める S の範囲は

$$0 < S \leq \frac{4}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{8}{3} a\sqrt{1 - a^2}, \quad 0 < S \leq \frac{4}{3}$$

III

(1)

出発してから2秒後に点Qが頂点Aにある確率 $r = a_1$ は、2回の移動で1回は反時計回り、1回は時計回りに移動する確率であるから、

$$\begin{aligned} r &= p(1-p) + (1-p)p \\ &= 2p(1-p) \end{aligned}$$

である。また、出発してから2秒後に点Qが頂点Cにある確率 c_1 は、2秒後に頂点Aにある事象の余事象の確率であるから、

$$c_1 = 1 - r$$

である。よって、

$$\begin{aligned} a_1 - c_1 &= r - (1-r) \\ &= 2r - 1 \\ &= -4p^2 + 4p - 1 \\ &= -(2p-1)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

が示される。

(証明終)

(答) $r = 2p(1-p)$

(2)

(1)および対称性より、2秒間で点Qが頂点CからCへと移動する確率は、点Qが頂点AからAへと移動する確率と等しく、 r である。また、2秒間で点Qが頂点CからAへと移動する確率は、頂点AからCへと移動する確率と等しく、 $1-r$ である。したがって、 a_2, c_2 を r によって表すと、

$$\begin{aligned} a_2 &= ra_1 + (1-r)c_1 \\ &= r^2 + (1-r)^2 \\ &= 2r^2 - 2r + 1 \\ c_2 &= (1-r)a_1 + rc_1 \\ &= (1-r)r + r(1-r) \\ &= 2r(1-r) \end{aligned}$$

となる。この結果を用いると、

$$\begin{aligned} a_2 - c_2 &= (2r^2 - 2r + 1) - 2r(1-r) \\ &= 4r^2 - 4r + 1 \\ &= (2r-1)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

が示される。

(証明終)

(答) $a_2 = 2r^2 - 2r + 1, c_2 = 2r(1-r)$

(3)

(2)と同様に、 a_{n+1}, c_{n+1} を a_n, c_n, r で表すと、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ra_n + (1-r)c_n \\ c_{n+1} &= (1-r)a_n + rc_n \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c_{n+1} &= \{ra_n + (1-r)c_n\} - \{(1-r)a_n + rc_n\} \\ &= (2r-1)a_n - (2r-1)c_n \\ &= (2r-1)(a_n - c_n) \end{aligned}$$

と表される。

(答) $a_{n+1} - c_{n+1} = (2r-1)(a_n - c_n)$

(4)

(3)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= (2r-1)(a_{n-1} - c_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= (2r-1)^{n-1}(a_1 - c_1) \end{aligned}$$

となり、この式は $n=1$ のときも成り立つ。ここで、(1)より、

$$a_1 - c_1 = 2r - 1 = -(2p-1)^2 \leq 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} a_n - c_n &= \left\{ -(2p-1)^2 \right\}^{n-1} \cdot \left\{ -(2p-1)^2 \right\} \\ &= (-1)^n \cdot (2p-1)^{2n} \end{aligned}$$

となる。以下 p の値によって場合分けを行う。

[1] $p = \frac{1}{2}$ のとき

$2p-1=0$ であるため、 $a_n - c_n$ は n の値によらず0である。

[2] $0 < p < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < p < 1$ のとき

$(2p-1)^{2n} > 0$ であるため、 $a_n - c_n$ は n が偶数のとき正となり、 n が奇数のとき負となる。

以上[1], [2]より、 $a_n > c_n$ となる条件は、

$$n \text{ が偶数かつ } 0 < p < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < p < 1$$

である。

(答) n が偶数かつ $0 < p < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < p < 1$

IV

(1)

$I(t) = \int_1^t \frac{1}{x^p} dx$ について、 $p=1$ のとき、

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^t \frac{1}{x} dx \\ &= [\log x]_1^t \\ &= \log t \end{aligned}$$

である。また、 $p \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_1^t \frac{1}{x^p} dx \\ &= \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^t \\ &= \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \log t \quad (p=1) \\ \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \quad (p \neq 1) \end{cases}$$

(2)

$J(t) = \int_e^t \frac{1}{x(\log x)^q} dx$ について、 $s = \log x$ とおくと $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}$ であり、また、積分区間の対応は下表の通りである。

x	e	$\rightarrow$	t
s	1	$\rightarrow$	$\log t$

よって、置換積分を用いると、

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_e^t \frac{1}{x(\log x)^q} dx \\ &= \int_1^{\log t} \frac{1}{s^q} ds \end{aligned}$$

となる。これは $I(\log t)$ において p を q におきかえたものであるから、

$$J(t) = \begin{cases} \log(\log t) \quad (q=1) \\ \frac{(\log t)^{1-q} - 1}{1-q} \quad (q \neq 1) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \log(\log t) \quad (q=1) \\ \frac{(\log t)^{1-q} - 1}{1-q} \quad (q \neq 1) \end{cases}$$

(3)

$K(t) = \int_1^t \frac{\log x}{x^r} dx$ について、 $r=1$ のとき、(2)と同様に $s = \log x$ とおくと、 $\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}$ であり、積分区間の対応は下表の通りである。

x	1	$\rightarrow$	t
s	0	$\rightarrow$	$\log t$

よって、置換積分を用いて、

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_1^t \frac{\log x}{x} dx \\ &= \int_0^{\log t} s ds \\ &= \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{\log t} \\ &= \frac{(\log t)^2}{2} \end{aligned}$$

である。また、 $r \neq 1$ のとき、部分積分を用いて、

$$\begin{aligned} K(t) &= \int_1^t \frac{\log x}{x^r} dx \\ &= \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \cdot \log x \right]_1^t - \int_1^t \frac{x^{1-r}}{1-r} \cdot (\log x)' dx \\ &= \frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \int_1^t \frac{x^{1-r}}{1-r} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{1}{1-r} \int_1^t x^{-r} dx \\ &= \frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{1}{1-r} \left[\frac{x^{1-r}}{1-r} \right]_1^t \\ &= \frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{t^{1-r} - 1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \frac{(\log t)^2}{2} \quad (r=1) \\ \frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{t^{1-r} - 1}{(1-r)^2} \quad (r \neq 1) \end{cases}$$

(4)

まず、 $I(t)$ が $t \rightarrow \infty$ において有限な極限值をもつかどうかを、 p の値で場合分けをして調べる。

[1] $p=1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \log t \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり、無限大に発散する。よって、 $I(t)$ は有限な極限值を持たない。

[2] $0 < p < 1$ のとき

$t \rightarrow \infty$ において $t^{1-p} \rightarrow \infty$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり、無限大に発散する。よって、 $I(t)$ は有限な極限值を持たない。

[3] $1 < p$ のとき

$t \rightarrow \infty$ において $t^{1-p} \rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-p} - 1}{1-p} \\ &= \frac{1}{p-1} \end{aligned}$$

となり、これは有限な値である。

以上[1], [2], [3]より、 $t \rightarrow \infty$ において $I(t)$ が有限な極限值をもつ条件は $1 < p$ である。次に、 $J(t)$ について、(2)より $J(t)$ は $I(\log t)$ において p を q におきかえたものである。 $t \rightarrow \infty$ において $\log t \rightarrow \infty$ であるから、 $I(\log t)$ が有限な極限值をもつ条件は $1 < p$ である。よって、 $t \rightarrow \infty$ において $J(t)$ が有限な極限值をもつ条件は $1 < q$ である。最後に、 $K(t)$ について同様に、 r の値によって場合分けをして調べる。

[1] $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\log t)^2}{2} \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり、無限大に発散する。よって、 $K(t)$ は有限な極限值を持たない。

[2] $0 < r < 1$ のとき

$t \rightarrow \infty$ において $t^{1-r} \rightarrow \infty$, $\log t \rightarrow \infty$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{t^{1-r} - 1}{(1-r)^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{(1-r)t^{1-r} \cdot \log t - t^{1-r} + 1}{(1-r)^2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1-r} \{ (1-r) \log t - 1 \} + 1}{(1-r)^2} \right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

となり、無限大に発散する。よって、 $K(t)$ は有限な極限值を持たない。

[3] $1 < r$ のとき

$t \rightarrow \infty$ において $t^{1-r} \rightarrow 0$ である。また、 $t^{r-1} = u$ とおくと、 $t = u^{\frac{1}{r-1}}$ であり、 $t \rightarrow \infty$ のとき $u \rightarrow \infty$ となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-r} \cdot \log t &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t^{r-1}} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\log u^{\frac{1}{r-1}}}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{r-1} \cdot \frac{\log u}{u} \\ &= 0 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \right) \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{1-r} \cdot \log t}{1-r} - \frac{t^{1-r} - 1}{(1-r)^2} \right) \\ &= \frac{1}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

となり、これは有限な値になる。

以上[1], [2], [3]より、 $t \rightarrow \infty$ において $K(t)$ が有限な極限值をもつ条件は $1 < r$ である。

$$(\text{答}) \quad 1 < p, 1 < q, 1 < r$$