

I

【解答】

(1) 82 (2) 443

【解説】

(1)

$|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$, $|y-5x|=5$ をすべて満たす整数の組 (x, y) の数を求めればよい。まず

$$\begin{aligned} |y-5x| &= 5 \\ \Leftrightarrow y-5x &= \pm 5 \\ \Leftrightarrow y &= 5x \pm 5 \end{aligned}$$

であるから、整数の組 (x, y) が $y=5x+5$ と $y=5x-5$ のどちらを満たすかで場合分けする。

[1] $y=5x+5$ を満たすとき

$$\begin{aligned} |y| &\leq 100 \text{ であるから,} \\ |5x+5| &\leq 100 \\ \Leftrightarrow -100 &\leq 5x+5 \leq 100 \\ \Leftrightarrow -21 &\leq x \leq 19 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。①と $|x| \leq 100$ を満たす整数 x の数は $19 - (-21) + 1 = 41$ である。 $y=5x+5$ より、 x と y は1対1に対応するから、求める整数の組の数は41となる。

[2] $y=5x-5$ を満たすとき

$$\begin{aligned} |y| &\leq 100 \text{ であるから,} \\ |5x-5| &\leq 100 \\ \Leftrightarrow -100 &\leq 5x-5 \leq 100 \\ \Leftrightarrow -19 &\leq x \leq 21 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。よって[1]と同様に、求める整数の組の数は41である。

以上[1], [2]より、

$$\begin{aligned} n(A) &= 41 + 41 \\ &= 82 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$|x| \leq 100$, $|y| \leq 100$, $|y-5x| \leq 5$ をすべて満たす整数の組 (x, y) の数を求めればよい。まず

$$\begin{aligned} |y-5x| &\leq 5 \\ \Leftrightarrow -5 &\leq y-5x \leq 5 \\ \Leftrightarrow 5x-5 &\leq y \leq 5x+5 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。以降、 x について場合分けを行う。

[1] $x < -21$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{より,} \\ y &\leq 5x+5 \\ &< 5 \cdot (-21) + 5 \\ &= -100 \end{aligned}$$

となるが、これは $|y| \leq 100$ を満たさないから不適である。

[2] $x = -21$ のとき

③ $\Leftrightarrow -110 \leq y \leq -100$ となる。これと $|y| \leq 100$ を満たす整数 y は $y = -100$ だけ1つである。

[3] $x = -20$ のとき

③ $\Leftrightarrow -105 \leq y \leq -95$ となる。これと $|y| \leq 100$ を満たす整数 y は $y = -100, -99, \dots, -95$ の6つである。

[4] $-19 \leq x \leq 19$ のとき

x は①かつ②を満たすから、 $|5x+5| \leq 100$, $|5x-5| \leq 100$ が成り立つ。よって、各 x に対して③を満たす11個の整数 $y = 5x-5, 5x-4, \dots, 5x+5$ はすべて $|y| \leq 100$ を満たす。

[5] $x = 20$ のとき

③ $\Leftrightarrow 95 \leq y \leq 105$ となる。これと $|y| \leq 100$ を満たす整数 y は $y = 95, 96, \dots, 100$ の6つである。

[6] $x = 21$ のとき

③ $\Leftrightarrow 100 \leq y \leq 110$ となる。これと $|y| \leq 100$ を満たす整数 y は $y = 100$ だけ1つである。

[7] $x > 21$ のとき

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{より,} \\ y &\geq 5x-5 \\ &> 5 \cdot 21 - 5 \\ &= 100 \end{aligned}$$

となるが、これは $|y| \leq 100$ を満たさないから不適である。

以上[1]から[7]より、

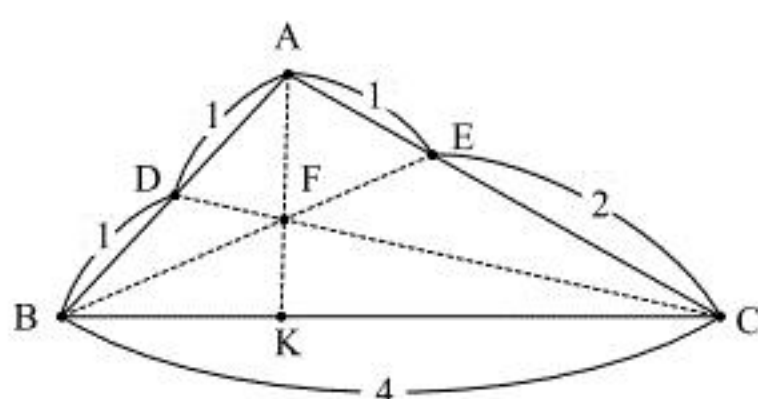
$$n(B) = 0 + 1 + 6 + 11 \cdot 39 + 6 + 1 + 0 = 443$$

である。

Ⅱ

(1)

△ABCを図示すると以下の通りになる。



△ABCに余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BAC \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{3}{2}$

(2)

まず、問題文の条件から $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\vec{c}$ である。そして、点Fは直線CD上の点であるから、ある実数 s を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= s\overrightarrow{AD} + (1-s)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{s}{2}\vec{b} + (1-s)\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、点Fは直線BE上の点でもあるから、ある実数 t を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AE} \\ &= t\vec{b} + \frac{1-t}{3}\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

とも表すことができる。ここで、直線ABと直線ACは平行でないから、 $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立である。したがって、式①と式②の $\vec{b}, \vec{c}$ の係数はそれぞれ等しくなるから、

$$\begin{cases} \frac{s}{2} = t \\ 1-s = \frac{1-t}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{4}{5}, t = \frac{2}{5}$$

となる。よって、これを式①に代入して、 $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$ を得る。

(答) $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$

(3)

点Kは直線AF上の点だから、ある実数 u を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= u\overrightarrow{AF} \\ &= \frac{2}{5}u\vec{b} + \frac{1}{5}u\vec{c} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、点Kは直線BC上の点でもあるから、ある実数 v を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= v\overrightarrow{AB} + (1-v)\overrightarrow{AC} \\ &= v\vec{b} + (1-v)\vec{c} \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

とも表すことができる。 $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立だから式③と式④の $\vec{b}, \vec{c}$ の係数はそれぞれ等しくなるため、

$$\begin{cases} \frac{2}{5}u = v \\ \frac{1}{5}u = 1-v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{5}{3}, v = \frac{2}{3}$$

となる。これを式④に代入して、 $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ を得る。したがって、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AK}|^2 &= \left| \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{c}|^2 + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{19}{9}\end{aligned}$$

となり、 $|\overrightarrow{AK}| > 0$ であるから $AK = \frac{\sqrt{19}}{3}$ を得る。

(答) $AK = \frac{\sqrt{19}}{3}$

Ⅲ

(1)

円錐状の容器の上面の円周の長さは、もとの扇形の弧の長さと等しく、

$$2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta}{2\pi} = \theta$$

である。上面の半径は a であるから、

$$\begin{aligned} 2\pi a &= \theta \\ \therefore a &= \frac{\theta}{2\pi} \end{aligned}$$

と表される。また、円錐の母線の長さは1であるから、円錐の高さ h は

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{1^2 - a^2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\theta}{2\pi}, h = \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$$

(2)

容器の容積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi a^2 h \\ &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} \\ &= \frac{1}{12\pi} \theta^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

であるから、 $x = \theta^2$ のとき

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{144\pi^2} \theta^4 \left\{ 1 - \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \right\} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{144\pi^2} x^2 - \frac{1}{576\pi^4} x^3 \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{144\pi^2} x^2 - \frac{1}{576\pi^4} x^3$$

(3)

$V > 0$ であるから y が最大となるとき V も最大となる。 y を x について微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{72\pi^2} x - \frac{1}{192\pi^4} x^2 \\ &= -\frac{1}{192\pi^4} x \left(x - \frac{8}{3} \pi^2 \right) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < x < 4\pi^2$ ($\because 0 < \theta < 2\pi$) の範囲において以下の増減表が得られる。

x	0	...	$\frac{8}{3}\pi^2$	...	$4\pi^2$
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	
y		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

これより $x = \frac{8}{3}\pi^2$ のとき y は最大となり、その値 y_M は

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{1}{144\pi^2} \left(\frac{8}{3}\pi^2\right)^2 - \frac{1}{576\pi^4} \left(\frac{8}{3}\pi^2\right)^3 \\ &= \frac{4}{81}\pi^2 - \frac{8}{243}\pi^2 \\ &= \frac{4}{243}\pi^2 \end{aligned}$$

となる。よって V の最大値 V_M は

$$\begin{aligned} V_M^2 &= \frac{4}{243}\pi^2 \\ \therefore V_M &= \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi \quad (\because V_M > 0) \end{aligned}$$

であり、このときの θ の値 θ_M は

$$\begin{aligned} \theta_M^2 &= \frac{8}{3}\pi^2 \\ \therefore \theta_M &= \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \quad (\because 0 < \theta_M < 2\pi) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad V \text{ の最大値 } \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi, \text{ そのときの } \theta \text{ の値 } \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$$

IV

(1)

n 回目の試行の直後に箱 B に赤球が入っている事象を X_n とすると、その確率は p_n である。
 X_1 となるのは1回目の試行で箱 A から赤球を取り出す場合であるから、その確率は

$$p_1 = \frac{1}{5}$$

である。また、 X_2 となるのは「 X_1 かつ 2 回目の試行で箱 B から白球を取り出す」場合と「 $\overline{X_1}$ かつ 2 回目の試行で箱 A から赤球を取り出す」場合であり、これらは互いに排反であるから、その確率は

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \cdot \frac{4}{5} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{8}{25} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{8}{25}$$

(2)

$n \geq 2$ のとき、 X_n となるのは「 X_{n-1} かつ n 回目の試行で箱 B から白球を取り出す」場合と「 $\overline{X_{n-1}}$ かつ n 回目の試行で箱 A から赤球を取り出す」場合であり、これらは互いに排反であるから、その確率は

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{4}{5} + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{5}$$

となる。これを整理すると $p_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} \left(p_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$ となるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{2} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10}$ 、

公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= -\frac{3}{10} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n \end{aligned}$$

となる。これは $n=1$ のときも成立するから、自然数 n について、 $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n$ である。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

(3)

箱 A, B の対称性より、3 回の試行を行った前後で赤球が同じ箱にある確率を求めればよい。
 1 回目の試行の前は箱 A に赤球があることから、求める確率は 3 回目の試行の直後に箱 A に赤球がある確率に等しい。したがって、

$$\begin{aligned} 1 - p_3 &= 1 - \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^3 \right\} \\ &= \frac{76}{125} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{76}{125}$$