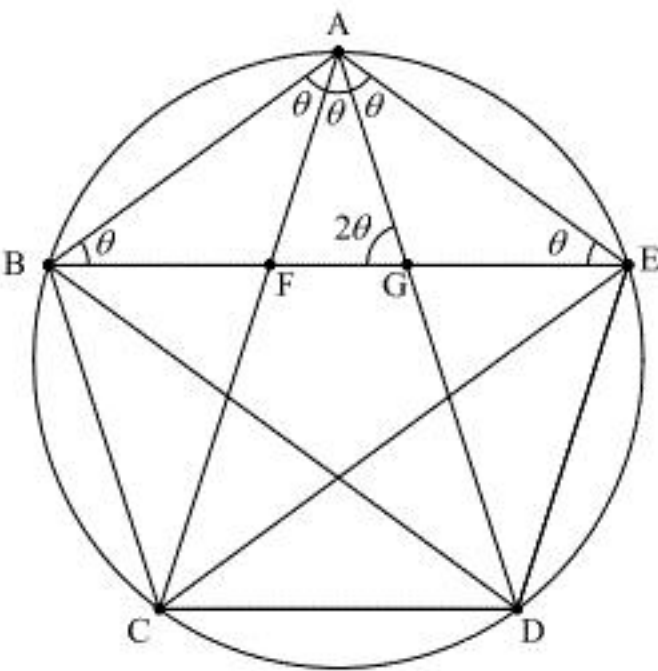


I

(1)



5点A, B, C, D, Eを通る円を考える。 $\angle ABE = \theta$ とすると、円周角の定理より、
 $\angle BAC = \theta, \angle CAD = \theta, \angle DAE = \theta, \angle AEB = \theta$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\angle BAG &= \angle BAC + \angle CAD = 2\theta \\ \angle BGA &= \angle DAE + \angle AEB = 2\theta\end{aligned}$$

となるから、 $\triangle BAG$ は $BA = BG$ の二等辺三角形である。よって、 $BG = BA = 1$ である。また、対称性より、

$$\begin{aligned}EF &= BG = 1 \\ BE &= AC = x\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}FG &= BG + EF - BE \\ &= 1 + 1 - x \\ &= 2 - x\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(2)

$\angle FBA = \angle FAB$ より、 $\triangle FAB$ は $AF = BF$ の二等辺三角形である。よって、

$$\begin{aligned}AF &= BF \\ &= BG - FG \\ &= 1 - (2 - x) \\ &= x - 1\end{aligned}$$

となる。これと $\triangle ACD \sim \triangle AFG$ より、

$$\begin{aligned}AC : CD &= AF : FG \\ \Leftrightarrow x : 1 &= (x - 1) : (2 - x) \\ \Leftrightarrow x(2 - x) &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \therefore x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(3)

直線ABと直線ECは平行であり、対称性より $AB = 1, EC = x$ であるから、 $\overrightarrow{EC} = x\overrightarrow{AB}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} \\ &= \overrightarrow{AE} + x\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

II

(1)

問題の関係式より

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 - a_1 \\ &= b - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 - a_2 \\ &= (b - a) - b \\ &= -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 - a_3 \\ &= -a - (b - a) \\ &= -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_6 &= a_5 - a_4 \\ &= -b - (-a) \\ &= -b + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 &= a_6 - a_5 \\ &= (-b + a) - (-b) \\ &= a \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad a_3 = b - a, a_4 = -a, a_5 = -b, a_6 = -b + a, a_7 = a$$

(2)

(1)より

$$a_1 = a_7 = a$$

であるから、題意をみたす自然数 p のひとつに 6 があると予測でき、これを示す。関係式より

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= a_{n+5} - a_{n+4} \\ &= (a_{n+4} - a_{n+3}) - a_{n+4} \\ &= -a_{n+3} \\ &= -(a_{n+2} - a_{n+1}) \\ &= -\{(a_{n+1} - a_n) - a_{n+1}\} \\ &= a_n \end{aligned}$$

であり、たしかに $a_{n+p} = a_n$ (n は自然数) が成立するような自然数 $p = 6$ が存在する。

(証明終)

次に p の最小値が 6 であることを示す。つまり、5 以下の自然数 p では $a_{n+p} = a_n$ (n は自然数)

とならないことを示す。問題より $a > 0$ かつ $b < 0$ であるから、

$$\begin{aligned} a_1 &= a > 0 \\ a_2 &= b < 0 \\ a_3 &= b - a < 0 \\ a_4 &= -a < 0 \\ a_5 &= -b > 0 \\ a_6 &= -b + a > 0 \\ a_7 &= a > 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、5 以下の自然数 p の中で、 $a_{n+p} = a_n$ となるのは $n = 1$ での成立を考える

と、 $a_1 > 0$ より $p = 4, 5$ が必要である。

[1] $p = 4$ のとき

$a_2 < 0, a_6 > 0$ より $a_{n+p} = a_n$ が $n = 2$ において成立しないので不適である。

[2] $p = 5$ のとき

$a_2 < 0, a_7 > 0$ より $a_{n+p} = a_n$ が $n = 2$ において成立しないので不適である。

以上[1], [2]より、5 以下の自然数 p では $a_{n+p} = a_n$ (n は自然数) が成立しないので、 p の最小値

は 6 である。

(答) 6

(3)

(2)より、任意の自然数 k について

$$S_{6k-5} = a, S_{6k-4} = a + b, S_{6k-3} = 2b, S_{6k-2} = 2b - a, S_{6k-1} = b - a, S_{6k} = 0$$

である。したがって、 $a > 0, b < 0$ であることを考慮して、最大値は

$$S_{6k-5} = a$$

であり、最小値は

$$S_{6k-2} = 2b - a$$

である。

(答) 最大値 a 、最小値 $2b - a$

(4)

(3)より、任意の自然数 k について

$$|S_{6k}| = 0$$

であるから、これが $|S_n|$ の最小値である。また、(3)より

$$\begin{aligned} |S_{6k-2}| - |S_{6k-5}| &= |2b - a| - |a| \\ &= a - 2b - a \\ &= -2b (> 0) (\because a > 0, b < 0) \end{aligned}$$

であるから、 $|S_n|$ の最大値は

$$|S_{6k-2}| = a - 2b$$

である。

(答) 最大値 $a - 2b$ 、最小値 0

Ⅲ

(1)

与式を変形すると

$$f(x) \leq f(a)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (a-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{(x-1)+(a-1)\}\{(x-1)-(a-1)\} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a-2)(x-a) \leq 0$$

となる。ここで、 $0 < a < 1$ より $a < 2-a$ であるので、求める x の範囲は

$$a \leq x \leq 2-a$$

となる。

(答) $a \leq x \leq 2-a$

(2)

(1)より、 $a \leq x \leq 2-a$ のとき $f(x) \leq f(a)$ となり、 x が $a \leq x \leq 2-a$ 以外の範囲の数であるとき、 $f(x) > f(a)$ となる。したがって、 $0 < a < 1$ より $0 < a < 2-a < 3$ であるので、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 |f(x) - f(a)| dx \\ &= \int_0^a \{f(x) - f(a)\} dx - \int_a^{2-a} \{f(x) - f(a)\} dx + \int_{2-a}^3 \{f(x) - f(a)\} dx \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3} - (a-1)^2 x \right]_0^a - \left[\frac{(x-1)^3}{3} - (a-1)^2 x \right]_a^{2-a} + \left[\frac{(x-1)^3}{3} - (a-1)^2 x \right]_{2-a}^3 \\ &= \left\{ \frac{(a-1)^3}{3} - (a-1)^2 a - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} - \left\{ \frac{(1-a)^3}{3} - (a-1)^2 (2-a) - \frac{(a-1)^3}{3} + a(a-1)^2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{8}{3} - 3(a-1)^2 - \frac{(1-a)^3}{3} + (a-1)^2 (2-a) \right\} \\ &= -\frac{4}{3}(1-a)^3 - 2a(1-a)^2 - 3(1-a)^2 + 2(2-a)(1-a)^2 + 3 \\ &= -\frac{(8a+1)(1-a)^2}{3} + 3 \\ &= -\frac{8}{3}a^3 + 5a^2 - 2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{8}{3}a^3 + 5a^2 - 2a + \frac{8}{3}$

(3)

I は a の関数であるので $I(a) = -\frac{8}{3}a^3 + 5a^2 - 2a + \frac{8}{3}$ として、 a で微分すると

$$\begin{aligned} I'(a) &= -8a^2 + 10a - 2 \\ &= -2(4a-1)(a-1) \\ &= 2(4a-1)(1-a) \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < a < 1$ において $I(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	(0)	...	$\frac{1}{4}$	...	(1)
$I'(a)$		-	0	+	
$I(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって、増減表より $I(a)$ を最小にする a の値は $a = \frac{1}{4}$ とわかる。

(答) $a = \frac{1}{4}$