I

(1)

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは

$$S_n = -a_n + 3n + 1 \qquad \cdots ①$$

を満たす。これよりS_{n+1}は

$$S_{n+1} = -a_{n+1} + 3(n+1) + 1 \qquad \cdots ②$$

と表せる。②から①を辺々引いて

$$S_{n+1} - S_n = -a_{n+1} + a_n + 3$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n + 3$$
$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$$

を得る。

(答) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$

(2)

①より

$$S_1 = -a_1 + 3\cdot1 + 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 = -a_1 + 3\cdot1 + 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 = 2$$

である。ここで(1)の結論は

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(a_n - 3)$$

と変形できる。したがって数列$\{a_n - 3\}$は初項-1，公比$\frac{1}{2}$の等比数列であるから，

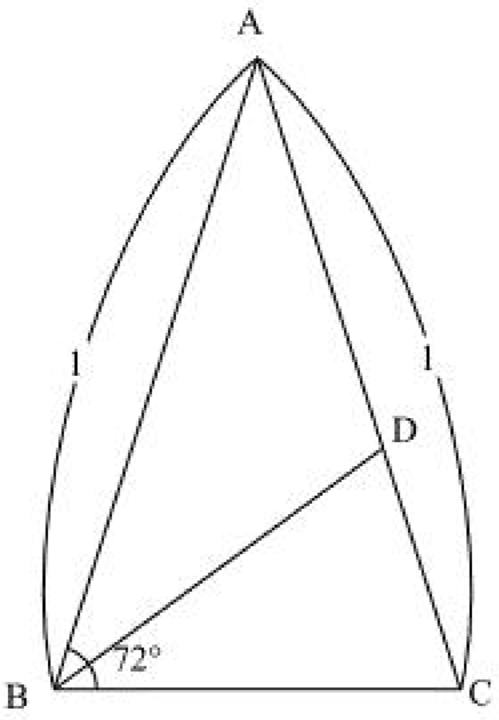
$$a_n - 3 = -1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$$

を得る。

(答) $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$

Ⅱ

(1)



$AB = AC$, $\angle ABC = 72°$, $\angle ABD = \angle CBD$ より，$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから，

$\angle ACB = 72°$ となり，

$$\begin{aligned}\angle BAD &= 180° - (72° + 72°)\\ &= 36°\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle ABD &= \frac{1}{2}\angle ABC\\ &= 36°\end{aligned}$$

が成り立つ。よって，$\triangle DAB$ において三角形の外角の性質より，

$$\angle BDC = \angle BAD + \angle ABD = 72°$$

を得る。

(答) $\angle BDC = 72°$

(2)

(1)より，$\triangle DAB$ と $\triangle BCD$ が二等辺三角形であるため，

$$DA = DB = BC$$

が成り立つ。また，(1)より，$\triangle ABC$ と $\triangle BDC$ において，

$$\angle ABC = \angle BDC = 72°$$

$$\angle ACB = \angle BCD$$

が成り立つため $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$ である。ここで，$BC = x$ とおくと，相似比の関係から，

$$\begin{aligned}&AB : BC = BD : DC\\ &\Leftrightarrow 1 : x = x : (1-x)\\ &\Leftrightarrow 1\cdot(1-x) = x^2\\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0\\ &\therefore x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。よって，$BC = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(答) $BC = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(3)

$\triangle ABC$ において余弦定理より，

$$\begin{aligned}\cos 36° &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}\\ &= \frac{1 + 1 - \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2}\\ &= \frac{2 - \dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}}{2}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

を得る。

(答) $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Ⅲ

(1)

真数条件より，xの取りうる範囲は，

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ -x^2+2x+3>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ (x-3)(x+1)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ -1<x<3 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{2}<x<3$$

となる。

(答) $\dfrac{1}{2}<x<3$

(2)

式を変形すると，

$$\begin{aligned} y &= \log_3(2x-1)+\log_3(-x^2+2x+3) \\ &= \log_3(2x-1)(-x^2+2x+3) \\ &= \log_3(-2x^3+5x^2+4x-3) \end{aligned}$$

となる。ここで，$f(x)=-2x^3+5x^2+4x-3$とおく。対数関数の増減を考えると底3は1より大きいため，$f(x)$が最大のとき，yは最大となる。$f(x)$を微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2+10x+4 \\ &= -2(3x^2-5x-2) \\ &= -2(3x+1)(x-2) \end{aligned}$$

となる。したがって，増減表は以下のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	9	↘	

増減表より，$x=2$で$f(x)$は最大値9をとる。したがって，$x=2$でyは最大となる。その時の値は，

$$y=\log_3 9=2$$

である。

(答) $x=2$で最大値2

IV

(1)

n 枚のカードから1枚のカードを取り出し，そこに書かれている数字を記録して戻し，さらに1枚のカードを取り出すときの起こり得る結果は n^2 通りであり，同様に確からしい。ここで，n の値によって場合分けする。

[1] $n=1$ のとき

カードの取り出し方は $X=Y=1$ の1通りしかない。このとき，$X=2Y$ は成立しない。したがって，$X=2Y$ となる確率は0である。

[2] $n \geqq 2$ のとき

$X=2Y$ となるとき，$X=2^k$, $Y=2^{k-1}$ であればよい。ただし，k は $1 \leqq k \leqq n-1$ を満たす整数である。したがって，$X=2Y$ となる場合の数は $n-1$ (通り)となるので，$X=2Y$ となる確率は $\dfrac{n-1}{n^2}$ である。

以上[1], [2]より，$X=2Y$ となる確率は $n=1$ のとき0，$n \geqq 2$ のとき $\dfrac{n-1}{n^2}$ である。ここで，$n=1$ のとき $\dfrac{n-1}{n^2}=0$ であるので，$X=2Y$ となる確率は $n \geqq 1$ のとき $\dfrac{n-1}{n^2}$ となる。

(答) $\dfrac{n-1}{n^2}$

(2)

X が Y の倍数となるのは $X \geqq Y$ のときである。ここで，$0 \leqq j \leqq n-1$ を満たす整数 j を用いると，$Y=2^j$ のとき $X \geqq Y$ となるのは $X=2^j, 2^{j+1}, \cdots, 2^{n-1}$ の $n-j$ (通り)である。したがって，X が Y の倍数となる場合の数は

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}(n-j) &= n+(n-1)+\cdots+1\\ &= \sum_{i=1}^{n} i\\ &= \frac{n^2+n}{2}\end{aligned}$$

となる。よって，X が Y の倍数となる確率は

$$\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

である。

(答) $\dfrac{n+1}{2n}$