

I

(1)

$\alpha = \log_{10} x$, $\beta = \log_{10} y$ より, $x = 10^\alpha$, $y = 10^\beta$ が成り立つから, 与式は,

$$\begin{aligned} (10^{3\alpha+\beta})^4 &= \{(10^\alpha)^3 \cdot 10^\beta\}^4 \\ &= (x^3 \cdot y)^4 \\ &= x^{12} y^4 \end{aligned}$$

と変形できる。

(答) $x^{12} y^4$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} (10^{3\alpha+\beta})^4 &= 5^6 \\ \Leftrightarrow x^{12} y^4 &= 5^6 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。また, x は正の数であるから,

$$\begin{aligned} xy &= 5 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5}{x} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

より, ②を①に代入すると

$$\begin{aligned} x^{12} \cdot \left(\frac{5}{x}\right)^4 &= 5^6 \\ \Leftrightarrow x^8 \cdot 5^4 &= 5^6 \\ \Leftrightarrow x^8 &= 5^2 \\ \therefore x &= \sqrt[4]{5} \quad (\because x > 0) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また, ③を②に代入して

$$y = \frac{5}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4]{125}$$

が得られる。

(答) $x = \sqrt[4]{5}$, $y = \sqrt[4]{125}$

II

(1)

$t = \cos \theta - \sin \theta$ より,

$$\begin{aligned} t^2 &= (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

となるから,

$$2 \cos \theta \sin \theta = 1 - t^2$$

が成り立つ。よって, y を t の式で表すと,

$$\begin{aligned} y &= (1 - t^2) + t \\ &= -t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = -t^2 + t + 1$

(2)

t の式を変形すると,

$$\begin{aligned} t &= \cos \theta - \sin \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{3}{4} \pi \right) \end{aligned}$$

となる。よって, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より, t のとり得る値の範囲は,

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

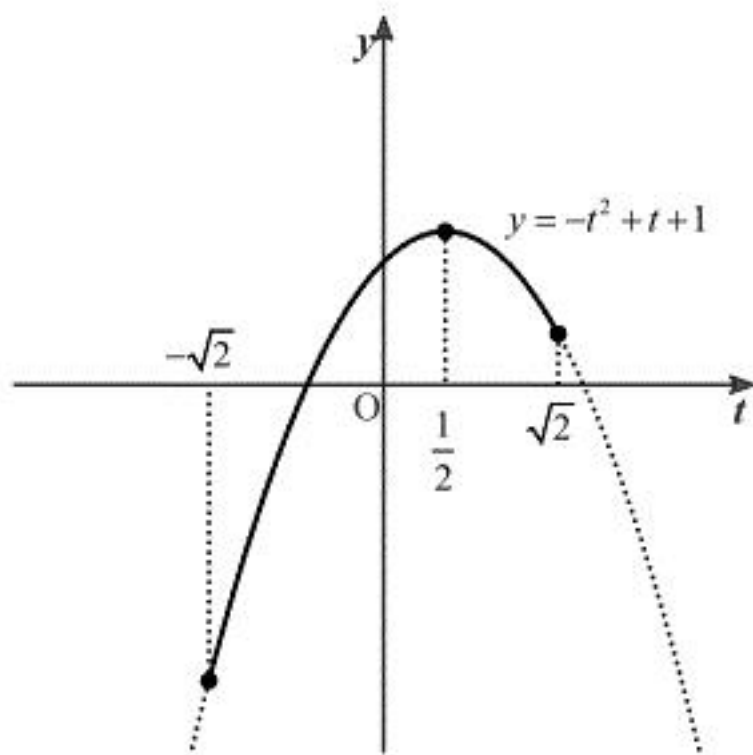
(答) $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

(3)

y の式を変形すると,

$$y = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

となる。よって, y の式をグラフにすると以下のようになる。



グラフより, y は $t = \frac{1}{2}$ のとき, 最大値 $y = \frac{5}{4}$ をとる。また, $t = -\sqrt{2}$ のとき, 最小値

$y = -1 - \sqrt{2}$ をとる。

(答) $t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{4}$, $t = -\sqrt{2}$ のとき最小値 $-1 - \sqrt{2}$

Ⅲ

$\int_0^1 tf(t)dt$ は定数であり、これを k とおく。すると、 $f(x)$ は、

$$f(x) = x^2 + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

表せる。ここで、 k について考えると、

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 tf(t)dt \\ &= \int_0^1 t(t^2 + k)dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + kt)dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}kt^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

が成り立つから、これを変形して

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}k &= \frac{1}{4} \\ \therefore k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。これを①に代入して、

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$$

IV

(1)

同時に取り出した2枚のカードの数字を、(①, ②)というように表記する。10枚のカードから2枚のカードを取り出す場合の数は

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45 \text{ (通り)}$$

であり、これらはすべて同様に確からしく起こる。ここで、取り出されたカードの数字の和が n となる場合を列挙すると、

$n=3$ のとき (①, ②)

$n=4$ のとき (①, ③)

$n=5$ のとき (①, ④), (②, ③)

$n=6$ のとき (①, ⑤), (②, ④)

$n=7$ のとき (①, ⑥), (②, ⑤), (③, ④)

$n=8$ のとき (①, ⑦), (②, ⑥), (③, ⑤)

$n=9$ のとき (①, ⑧), (②, ⑦), (③, ⑥), (④, ⑤)

というようになる。ここで、求める整数 N において、取り出した2枚のカードの数字の和が

N 以下となる場合の数を m 通りとおくと、その確率は $\frac{1}{3}$ 以下となるから、

$$\frac{m}{45} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow m \leq 15$$

となる。ここで、上の列挙された表より、取り出した2枚のカードの数字の和が n 以下となる場合の数は、

$n=7$ のとき 9 通り

$n=8$ のとき 12 通り

$n=9$ のとき 16 通り

である。したがって、求める整数 N は $N=8$ である。

(答) $N=8$

(2)

(1)より、取り出した2枚のカードの数字の和が N 以下となる場合の数は12通りである。この中で、5以上の数字が書かれたカードが含まれる場合の数は、(①, ⑤), (①, ⑥), (①, ⑦), (②, ⑤), (②, ⑥), (③, ⑤)の6通りである。よって、求める確率は、

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$