

I

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
i	a	b	h	i	p	o	d	g	c	l	e

【解説】

$N(0, 0, 1)$, $P(x, y, z)$, $Q(u, v, 0)$ より,

$$\overrightarrow{NP} = (x, y, z-1)$$

$$\overrightarrow{NQ} = (u, v, -1)$$

である。 $\overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP} \ (t > 0)$ となるとき,

$$1-z:1=1:t$$

が成り立つから,

$$1 \cdot 1 = (1-z) \cdot t$$

$$\therefore t = \frac{1}{1-z}$$

となる。また, $\overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP}$ より,

$$u = tx = \frac{x}{1-z}$$

$$v = ty = \frac{y}{1-z}$$

となるから, 点 Q の座標は $Q\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right)$ と求まる。ここで, 球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面

$H: x = d \ (0 < d < 1)$ が交わってできる図形 C は

$$\begin{cases} d^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = d \end{cases}$$

であり, 点 P が C 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めると,

$(u, v, 0)$ が求める軌跡上に存在する

$$\Leftrightarrow \text{図形 } C \text{ 上の点 } (x, y, z) \text{ で } \begin{cases} u = \frac{d}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \text{ を満たすものが存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{d}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \\ d^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \text{ をみたす実数 } y, z \text{ が存在する}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{d}{u}v \\ z = 1 - \frac{d}{u} \\ d^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \text{ をみたす実数 } y, z \text{ が存在する } (\because d \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow d^2 + \left(\frac{d}{u}v\right)^2 + \left(1 - \frac{d}{u}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow u^2d^2 - 2ud + v^2d^2 + d^2 = 0 \text{ かつ } u \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u - \frac{1}{d}\right)^2 + v^2 = \frac{1-d^2}{d^2} \text{ かつ } u \neq 0$$

であり, $\left(u - \frac{1}{d}\right)^2 + v^2 = \frac{1-d^2}{d^2}$ かつ $u = 0$ となる実数 v は存在しないため, 点 Q の軌跡を表す方

程式は $\left(u - \frac{1}{d}\right)^2 + v^2 = \frac{1-d^2}{d^2}$ となる。この方程式は uv 平面上で, 中心 $\left(\frac{1}{d}, 0\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ の

円を示すため, u の最小値は $\frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ である。いま, 点 P_1 の座標は $(d, 0, \sqrt{1-d^2})$ であり,

このとき点 Q_1 の座標は

$$Q_1\left(\frac{d}{1-\sqrt{1-d^2}}, 0, 0\right)$$

と表せるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{NQ_1} &= (u, v, -1) \cdot \left(\frac{d}{1-\sqrt{1-d^2}}, 0, -1\right) \\ &= u \times \frac{d}{1-\sqrt{1-d^2}} + 1 \\ &= u \times \frac{d(1+\sqrt{1-d^2})}{d^2} + 1 \\ &= u \times \left(\frac{1}{d} + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) + 1 \end{aligned}$$

である。 u と $\frac{1}{d} + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ はともに正であるから, u が最小値 $\frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ をとるとき, この内

積も最小となり, その値は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\right) + 1 &= \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1-d^2}{d^2}\right) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。また, このとき $v = 0$ より $y = 0$ であり, さらに $z = 1 - \frac{d}{u}$ より

$$\begin{aligned} z &= 1 - \frac{d^2}{1-\sqrt{1-d^2}} \\ &= 1 - \left(1 + \sqrt{1-d^2}\right) \\ &= -\sqrt{1-d^2} \end{aligned}$$

となる。よって, 内積が最小となるような点 P の座標は

$$P(d, 0, -\sqrt{1-d^2})$$

と求まる。

II

【解答】

ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ
c	d	f	b	e	b	d	a	d	c

【解説】

$P_n(x)$ は、すなわちサイコロを n 回振って、3 または 6 が s 回、それ以外の目が $n-s$ 回出る確率だから

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \left(\frac{2}{6}\right)^s \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{n-s} \cdot {}_nC_s \\ &= \frac{n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n} \end{aligned}$$

となる。点 R の位置が $x-3$ となるとき、3 または 6 が $s-1$ 回、それ以外の目が $n-s+1$ 回出る。ゆえに

$$\begin{aligned} P_n(x-3) &= \left(\frac{2}{6}\right)^{s-1} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{n-s+1} \cdot {}_nC_{s-1} \\ &= \frac{n!2^{n-s+1}}{(s-1)!(n-s+1)!3^n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x-3)}{P_n(x)} &= \frac{\frac{n!2^{n-s+1}}{(s-1)!(n-s+1)!3^n}}{\frac{n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n}} \\ &= \frac{2s}{n-s+1} \end{aligned}$$

となる。同様に、点 R の位置が $x+3$ となるとき、3 または 6 が $s+1$ 回、それ以外の目が $n-s-1$ 回出る。ゆえに

$$\begin{aligned} P_n(x+3) &= \left(\frac{2}{6}\right)^{s+1} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{n-s-1} \cdot {}_nC_{s+1} \\ &= \frac{n!2^{n-s-1}}{(s+1)!(n-s-1)!3^n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x+3)}{P_n(x)} &= \frac{\frac{n!2^{n-s-1}}{(s+1)!(n-s-1)!3^n}}{\frac{n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n}} \\ &= \frac{n-s}{2(s+1)} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $P_n(x)$ が最大となるためには

$$\begin{cases} \frac{P_n(x-3)}{P_n(x)} \leq 1 \\ \frac{P_n(x+3)}{P_n(x)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2s}{n-s+1} \leq 1 \\ \frac{n-s}{2(s+1)} \leq 1 \end{cases}$$

が必要である。すなわち、この 2 つの連立不等式を整理して

$$n-2 \leq 3s = x+n \leq n+1$$

が必要である。次に、

$$Q(s) = (3s-n) \times P_n(3s-n)$$

とおくと、

$$Q_n(s) = \frac{(3s-n)n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(s+1)}{Q_n(s)} &= \frac{\frac{\{3(s+1)-n\}n!2^{n-(s+1)}}{(s+1)!\{n-(s+1)\}!3^n}}{\frac{(3s-n)n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n}} \\ &= \frac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)(s+1)} \end{aligned}$$

となる。 $x=3s-n>0$ のもとで

$$\begin{aligned} \frac{Q_n(s+1)}{Q_n(s)} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)(s+1)} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow 9s^2 - 3(2n-3)s + n(n-5) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ 3s - \left(n - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{8n+9}}{2} \right) \right\} \left\{ 3s - \left(n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2} \right) \right\} &\geq 0 \\ \therefore 3s \leq n - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{8n+9}}{2}, 3s \geq n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $3s-n>0 \Leftrightarrow 3s>n$ より、 $\frac{Q_n(s+1)}{Q_n(s)} \leq 1$ となるための必要十分条件は

$$3s \geq n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} s &> 0 \text{ かつ } Q(s) > 0 \\ \Leftrightarrow s &> 0 \text{ かつ } (3s-n)P(3s-n) > 0 \\ \Leftrightarrow s &> 0 \text{ かつ } 3s-n > 0 \text{ かつ } P(3s-n) > 0 (\because P(3s-n) \geq 0) \\ \Leftrightarrow s &> 0 \text{ かつ } s > \frac{n}{3} \text{ かつ } 0 \leq s \leq n \\ \Leftrightarrow \frac{n}{3} &< s \leq n \end{aligned}$$

であり、 $L = n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2}$ とおくと、

$$\begin{aligned} L &= n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2} \\ &> n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8 \cdot 0 + 9}}{2} (\because n > 0) \\ &= n \\ L &= n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2} \\ &= n + \frac{(\sqrt{8n+9}-3)(\sqrt{8n+9}+3)}{2(\sqrt{8n+9}+3)} \\ &= n + \frac{4n}{\sqrt{8n+9}+3} \\ &< n + \frac{4n}{\sqrt{8 \cdot 0 + 9} + 3} (\because n > 0) \\ &= \frac{5}{3}n \\ &< 3n \end{aligned}$$

が成立するため、 $\frac{n}{3} < \frac{L}{3} < n$ が得られる。ここで、 m を $\frac{n}{3}$ より大きい最小の整数とする。 L が

整数で 3 の倍数のとき、すなわち $\frac{L}{3}$ が整数のとき、これまでの結果から

$$Q_n(m) < Q_n(m+1) < \cdots < Q_n\left(\frac{L}{3}-1\right) < Q_n\left(\frac{L}{3}\right) = Q_n\left(\frac{L}{3}+1\right) > \cdots > Q_n(n)$$

が成り立つ。ゆえに、この場合、 s が $\frac{L}{3}$ または $\frac{L}{3}+1$ のとき、 $Q_n(s) = xP_n(x)$ は最大となる。次

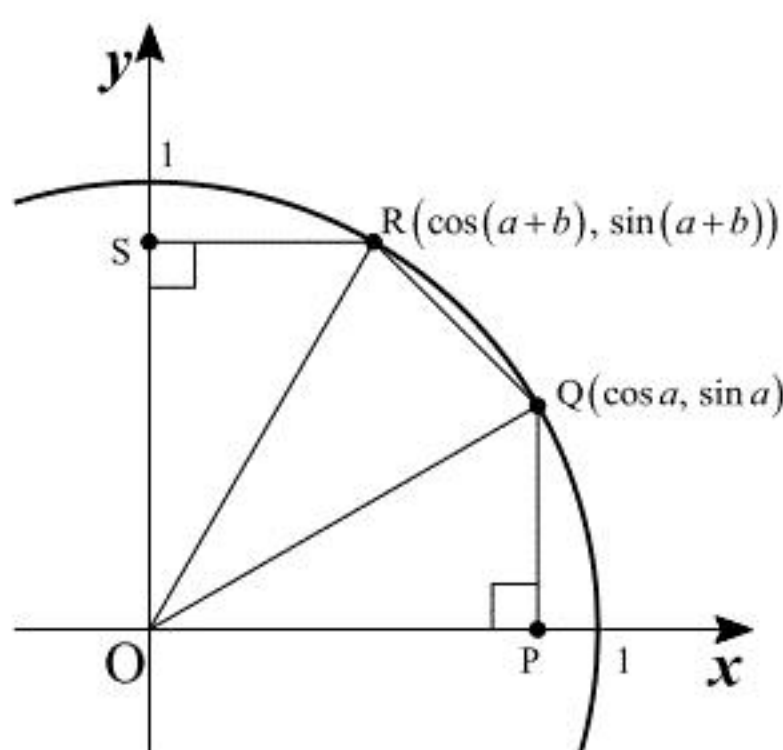
に、 L が整数で 3 の倍数でない場合を考える。 $\left[\frac{L}{3}\right]$ を $\frac{L}{3}$ を超えない最大の整数とすると、

これまでの結果から

$$Q_n(m) < Q_n(m+1) < \cdots < Q_n\left(\left[\frac{L}{3}\right]\right) < Q_n\left(\left[\frac{L}{3}\right]+1\right) > Q_n\left(\left[\frac{L}{3}\right]+2\right) > \cdots > Q_n(n)$$

が成り立つ。ゆえに、この場合、 s が $\left[\frac{L}{3}\right]+1$ のとき、すなわち、 $\frac{L}{3}$ より大きい最小の整数のとき、 $Q_n(s) = xP_n(x)$ は最大となる。

Ⅲ



(1)

$a > 0, b > 0, a + b < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos a > 0, \sin a > 0, \cos(a+b) > 0, \sin(a+b) > 0$ が成立するので, A は,

$$\begin{aligned} A &= \triangle OPQ + \triangle ORS \\ &= \frac{1}{2} OP \cdot PQ + \frac{1}{2} OS \cdot SR \\ &= \frac{1}{2} \cos a \sin a + \frac{1}{2} \cos(a+b) \sin(a+b) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad A = \frac{1}{2} \cos a \sin a + \frac{1}{2} \cos(a+b) \sin(a+b)$$

(2)

(1)より A を変形すると,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cos a \sin a + \frac{1}{2} \cos(a+b) \sin(a+b) \\ &= \frac{1}{4} \{ \sin 2a + \sin(2a+2b) \} \quad (\because 2 \text{ 倍角の公式}) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2a+b) \cos b \quad (\because \text{和積の公式}) \end{aligned}$$

となる。 $a > 0, b > 0, a + b < \frac{\pi}{2}$ より b は $0 < b < \frac{\pi}{2}$ の範囲の数であり, また, a を $0 < a < \frac{\pi}{2} - b$ の範囲で動かすとき, $2a+b$ の値域は,

$$b < 2a+b < \pi - b$$

となるので, $\sin(2a+b)$ のとりうる値の範囲は $\sin b < \sin(2a+b) \leq 1$ となる。したがって,

$0 < b < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos b > 0$ であるので, A のとりうる値の範囲は

$$\frac{1}{2} \cos b \sin b < A \leq \frac{1}{2} \cos b$$

となる。また, A が最大をとるときの a の値は

$$\begin{aligned} 2a+b &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \begin{array}{ll} A \text{ のとりうる値} & \frac{1}{2} \cos b \sin b < A \leq \frac{1}{2} \cos b \\ A \text{ が最大をとるときの } a & a = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2} \end{array}$$

(3)

上図より, $\angle ROQ = b$ が分かるので, B は

$$\begin{aligned} B &= A + \triangle OQR \\ &= A + \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot OR \cdot \sin \angle ROQ \\ &= A + \frac{1}{2} \sin b \end{aligned}$$

となる。 b を固定したときの B の最大値は(2)より $a = \frac{\pi}{4} - \frac{b}{2}$ のときであり,

$$B = \frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \sin b$$

となる。よって, b を動かしたときの $\frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \sin b$ の最大値について考えればよい。三角関数の合成により上式を変形すると,

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(b + \frac{\pi}{4}\right)$$

となることから, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned} b + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

のとき, B は最大となる。このとき a は

$$a = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

である。

(証明終)

IV

(1)

$a > 1, x > 0$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)' \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \left(a^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= -\frac{2}{x^3} \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \log a \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{2}{x^3} \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \log a \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-2x + \log a}{x^4} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = \frac{-2x + \log a}{x^4} \cdot a^{-\frac{1}{x}}$$

(2)

$x > 0$ の範囲で $x^4 > 0, a^{-\frac{1}{x}} > 0$ となることから、 $f'(x)$ と $-2x + \log a$ の正負は一致する。よって、

$f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	$\frac{\log a}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	最大	↘

したがって、 $b = \frac{\log a}{2}$ である。 k を実数としたときの $a^{\frac{k}{\log a}}$ の値は、

$$\begin{aligned} a^{\frac{k}{\log a}} &= \left(a^{\frac{1}{\log a}}\right)^{-k} \\ &= \left(a^{\log_e e}\right)^{-k} \\ &= e^{-k} \end{aligned}$$

となる。よって、最大値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\log a}{2}\right) &= \left(\frac{2}{\log a}\right)^2 a^{-\frac{2}{\log a}} \\ &= \left(\frac{2}{\log a}\right)^2 e^{-2} \\ &= \left(\frac{2}{e \log a}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} a^{-\frac{1}{x}} = a^0 = 1$ より、

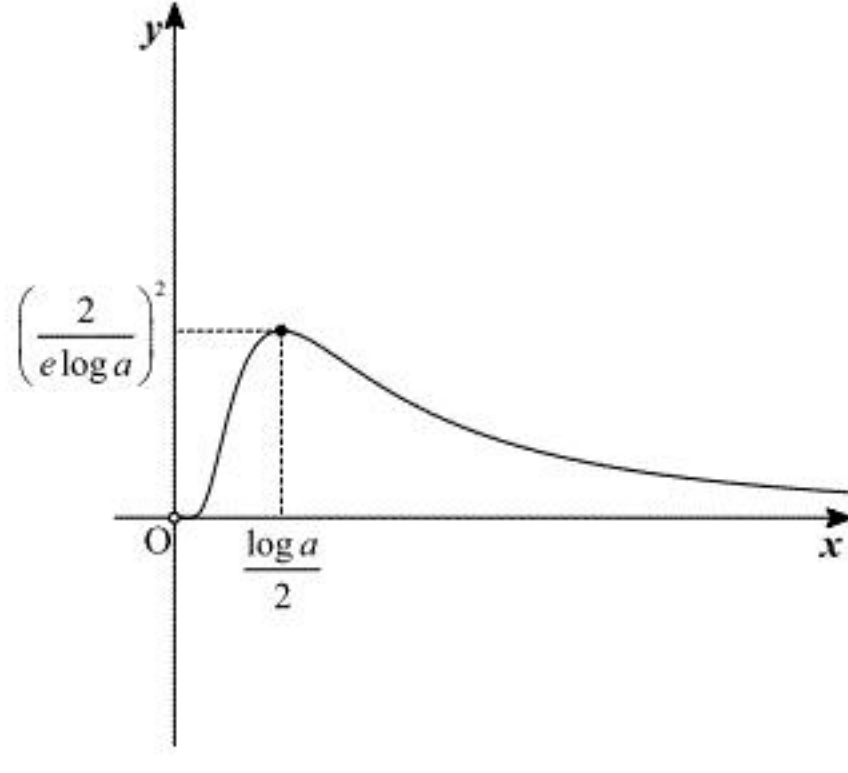
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \\ &= 0 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また、 $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} a^s = \infty$ であり、 $s > 0$ のもとで $\frac{1}{s} = x$ とおくと、 $s \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow +0$ となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^{-2} a^s} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 a^{-s} &= 0 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} a^{-\frac{1}{x}} &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ である。以上のことから、曲線 $y = f(x)$ の概形は下のようになる。

る。



(答) $b = \frac{\log a}{2}$, 前図

(3)

ℓ の方程式は、

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \Leftrightarrow y = f'(t)x + f(t) - t \cdot f'(t)$$

である。 $t > 0$ に注意すると、これが原点を通るとき、

$$\begin{aligned} f(t) - t \cdot f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} a^{-\frac{1}{t}} - t \cdot \frac{-2t + \log a}{t^4} a^{-\frac{1}{t}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-3t + \log a}{t^3} a^{-\frac{1}{t}} &= 0 \\ \Leftrightarrow -3t + \log a &= 0 \\ \therefore t &= \frac{\log a}{3} \end{aligned}$$

となる。また、このときの ℓ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)x \\ \Leftrightarrow y &= \frac{f(t)}{t} x \quad (\because f(t) = t \cdot f'(t), t > 0) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{t^3} a^{-\frac{1}{t}} x \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{3}{\log a}\right)^3 a^{-\frac{3}{\log a}} x \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{3}{\log a}\right)^3 e^{-3} x \\ \therefore y &= \left(\frac{3}{e \log a}\right)^3 x \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\log a}{3}, \ell: y = \left(\frac{3}{e \log a}\right)^3 x$$

(4)

まず、 $x \geq t$ において、接線 ℓ は曲線 C の下側にこないことを示す。ここで、

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

とすると、

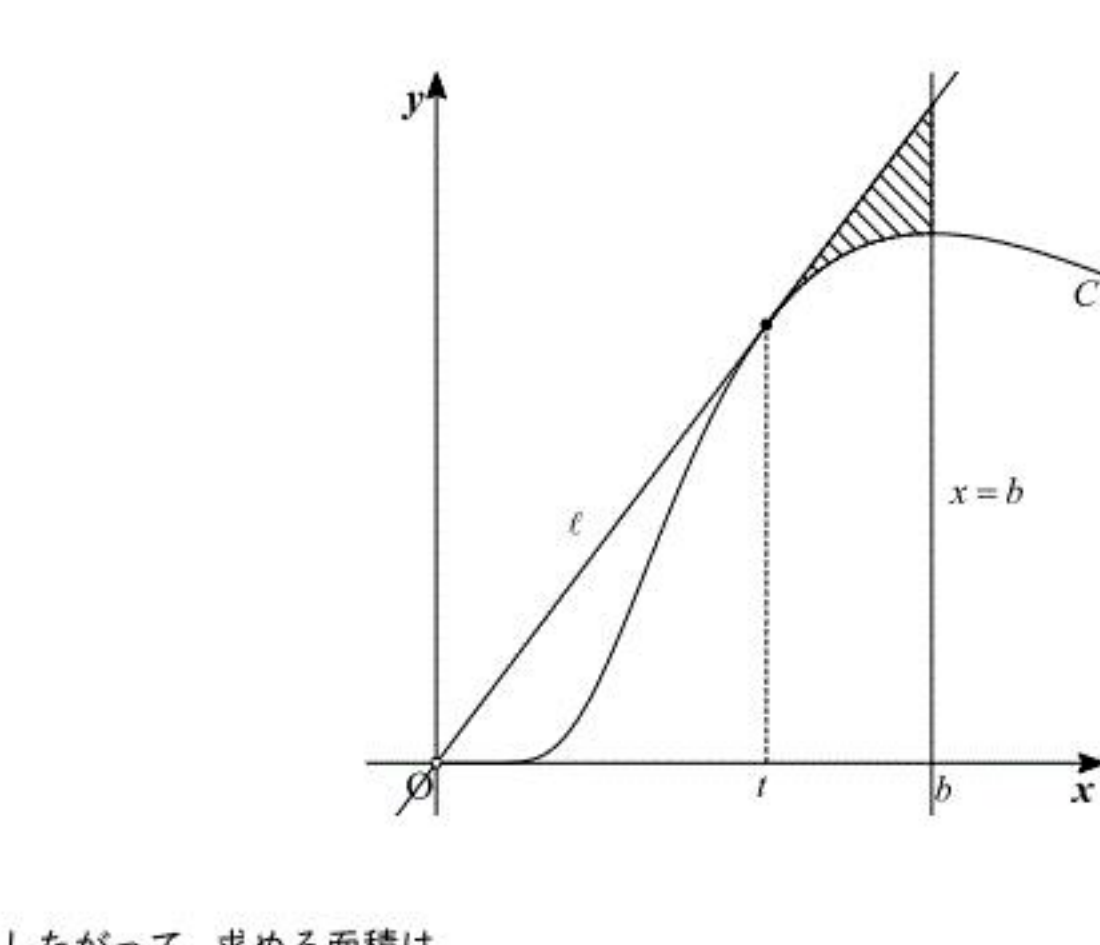
$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{x^2}\right)' \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \left(a^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= -\frac{3}{x^4} \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \log a \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{3}{x^4} \cdot a^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \log a \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{-3x + \log a}{x^5} \cdot a^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

となるので、 $x \geq t$ のとき、 $g'(x) \leq 0$ となる。したがって、 $x \geq t$ の範囲で $g(x)$ は減少関数となるから、

$$\frac{f(x)}{x} = g(x) \leq g(t) = \frac{f(t)}{t} = f'(t)$$

$$\therefore f(x) \leq f'(t)x$$

である。よって、 $x \geq t$ において、接線 ℓ は曲線 C の下側にこないことが示された。これをもとに面積を求める領域を図示すると、下図の斜線部のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\log a}{3}}^{\frac{\log a}{2}} \left\{ \left(\frac{3}{e \log a}\right)^3 x - \frac{1}{x^2} a^{-\frac{1}{x}} \right\} dx \\ &= \left[\left(\frac{3}{e \log a}\right)^3 \frac{x^2}{2} - \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{\log a} \right]_{\frac{\log a}{3}}^{\frac{\log a}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{e \log a}\right)^3 \left\{ \left(\frac{\log a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\log a}{3}\right)^2 \right\} - \frac{1}{\log a} \left(a^{-\frac{2}{\log a}} - a^{-\frac{3}{\log a}} \right) \\ &= \frac{15}{8e^3 \log a} - \frac{1}{\log a} (e^{-2} - e^{-3}) \\ &= \frac{23 - 8e}{8e^3 \log a} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{23 - 8e}{8e^3 \log a}$$