

I

(1)

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{3a_{n-1} + 5}{a_{n-1} + 3} \text{ より,}$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} + 5}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{13}{7}$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot \frac{13}{7} + 5}{\frac{13}{7} + 3} = \frac{37}{17}$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot \frac{37}{17} + 5}{\frac{37}{17} + 3} = \frac{49}{22}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{13}{7}, a_3 = \frac{37}{17}, a_4 = \frac{49}{22}$$

(2)

$$x = \frac{3x+5}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x = 3x + 5 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

より、求める解は

$$x = \pm\sqrt{5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \pm\sqrt{5}$$

(3)

数学的帰納法を利用して命題(*)を示す。

[1] $n=2$ のとき

$$(1) \text{ より } a_2 = \frac{13}{7} < 2 \text{ であり, } (2) \text{ より } \alpha = \sqrt{5} \text{ である。 } 2^2 < 5 < 3^2 \text{ より } 2 < \sqrt{5} < 3 \text{ なので}$$

$$1 < a_2 < \alpha \text{ は成り立つ。}$$

[2] $n=k$ ($k=2, 3, 4, \dots$) で $1 < a_n < \alpha$ が成り立つとする。 $n=k+1$ のときを考える。

$$1 < a_k < \alpha \text{ より}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5}+3} < \frac{4}{a_k+3} < \frac{4}{1+3}$$

$$\Leftrightarrow 3-1 < 3-\frac{4}{a_k+3} < 3-(3-\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow 2 < \frac{3a_k+5}{a_k+3} < \sqrt{5}$$

$$\text{である。よって } a_{k+1} = \frac{3a_k+5}{a_k+3} \text{ より } 1 < a_{k+1} < \alpha \text{ も成り立つ。}$$

以上[1], [2]より(*)は成り立つ。

(証明終)

(4)

(3)より $n \geq 2$ のとき $1 < a_n < \alpha$ であるから $n \geq 3$ のとき

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{4}|a_{n-1} - \alpha|$$

$$\Leftrightarrow 4(\alpha - a_n) < \alpha - a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\alpha - \frac{3a_{n-1}+5}{a_{n-1}+3}\right) < \alpha - a_{n-1}$$

である。ここで $a_{n-1}+3 > 0$ より

$$4\left(\alpha - \frac{3a_{n-1}+5}{a_{n-1}+3}\right) < \alpha - a_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha \cdot (a_{n-1}+3) - 4(3a_{n-1}+5) < (\alpha - a_{n-1})(a_{n-1}+3)$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}^2 - (9-3\alpha)a_{n-1} + 9\alpha - 20 < 0$$

が成り立つ。したがって、3以上のすべての整数 n に対し、不等式

$$a_{n-1}^2 - (9-3\sqrt{5})a_{n-1} + 9\sqrt{5} - 20 < 0$$

を証明すればよい。 $f(x) = x^2 - (9-3\sqrt{5})x + 9\sqrt{5} - 20$ とおくと

$$f(1) = 1^2 - (9-3\sqrt{5}) \cdot 1 + 9\sqrt{5} - 20$$

$$= 12\sqrt{5} - 28$$

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - (9-3\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} + 9\sqrt{5} - 20$$

$$= 0$$

であり、 $2^2 < 5 < 2.3^2$ より $2 < \sqrt{5} < 2.3$ であることに注意すると、

$$f(1) = 12\sqrt{5} - 28$$

$$< 12 \cdot 2.3 - 28$$

$$< 0$$

とわかる。よって、 $y = f(x)$ は下に凸な放物線であることを踏まえると、 $1 < x < \sqrt{5}$ において

$$f(x) < 0$$

が成り立つ。したがって $n \geq 3$ のとき $1 < a_{n-1} < \sqrt{5}$ より

$$f(a_{n-1}) < 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}^2 - (9-3\sqrt{5})a_{n-1} + 9\sqrt{5} - 20 < 0$$

が成り立つ。これより、3以上のすべての整数 n に対して

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{4}|a_{n-1} - \alpha|$$

は成り立つ。

(証明終)

II

(1)

a の値によって場合分けして (a, b, c) の組を考える。

[1] $a = -4$ のとき

$b + c = 4, -4 \leq b \leq c \leq 4$ より条件を満たす (b, c) の組は

$$(b, c) = (0, 4), (1, 3), (2, 2)$$

である。

[2] $a = -3$ のとき

$b + c = 3, -3 \leq b \leq c \leq 4$ より条件を満たす (b, c) の組は

$$(b, c) = (-1, 4), (0, 3), (1, 2)$$

である。

[3] $a = -2$ のとき

$b + c = 2, -2 \leq b \leq c \leq 4$ より条件を満たす (b, c) の組は

$$(b, c) = (-2, 4), (-1, 3), (0, 2), (1, 1)$$

である。

[4] $a = -1$ のとき

$b + c = 1, -1 \leq b \leq c \leq 4$ より条件を満たす (b, c) の組は

$$(b, c) = (-1, 2), (0, 1)$$

である。

[5] $a = 0$ のとき

$b + c = 0, 0 \leq b \leq c \leq 4$ より条件を満たす (b, c) の組は

$$(b, c) = (0, 0)$$

である。

[6] $a > 0$ のとき

$0 < a \leq b \leq c$ より

$$a + b + c > 0 + 0 + 0 = 0$$

となるので、条件を満たす (b, c) の組は存在しない。

以上[1]~[6]より求める (a, b, c) の組は

$$\begin{aligned} (a, b, c) = & (-4, 0, 4), (-4, 1, 3), (-4, 2, 2), (-3, -1, 4), (-3, 0, 3), (-3, 1, 2), \\ & (-2, -2, 4), (-2, -1, 3), (-2, 0, 2), (-2, 1, 1), (-1, -1, 2), \\ & (-1, 0, 1), (0, 0, 0) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad (a, b, c) = & (-4, 0, 4), (-4, 1, 3), (-4, 2, 2), (-3, -1, 4), (-3, 0, 3), (-3, 1, 2), \\ & (-2, -2, 4), (-2, -1, 3), (-2, 0, 2), (-2, 1, 1), (-1, -1, 2), \\ & (-1, 0, 1), (0, 0, 0) \end{aligned}$$

(2)

1回の試行における札の取り出し方は9通りある。各回の試行は独立なので3回の試行で札の取り出し方は 9^3 通りあり、これらはすべて同様に確からしい。ここで、3回の試行で取り出した札の数字が重複するかどうかによって場合分けして考えることにする。

[1] 3つの数字がすべて異なるとき

(1)で求めた整数の組 (a, b, c) のうち、これら3つの数字がすべて異なるものは8通り存在するので、このような札の取り出し方は

$$3! \cdot 8 \text{ 通り}$$

である。

[2] 2つの数字が同じで残り1つは別の数字であるとき

(1)で求めた整数の組 (a, b, c) のうち、これら2つの数字が同じで残り1つは別の数字であるものは4通り存在するので、このような札の取り出し方は

$${}_3C_2 \cdot 4 \text{ 通り}$$

である。

[3] 3つの数字がすべて同じとき

(1)で求めた整数の組 (a, b, c) のうち、これら3つの数字がすべて同じものは1通り存在するので、このような札の取り出し方は

$$1 \text{ 通り}$$

である。

以上[1]~[3]の事象は互いに排反であるから、題意を満たすような札の取り出し方の総数は

$$3! \cdot 8 + {}_3C_2 \cdot 4 + 1 = 61 (\text{通り})$$

である。よって求める確率は

$$\frac{61}{9^3} = \frac{61}{729}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{61}{729}$$

(3)

札の取り出し方は ${}_9P_3$ 通りあり、これらはすべて同様に確からしい。積が正になるのは3回とも正の数字が書かれた札を取り出したとき、または1回正の数字が書かれた札を取り出し、残り2回は負の数字が書かれた札を取り出したときである。3回とも正の数字が書かれた札を取り出す取り出し方は

$${}_4P_3 \text{ 通り}$$

であり、このときすべての場合において積は偶数である。1回正の数字が書かれた札を取り出し、残り2回は負の数字が書かれた札を取り出すような取り出し方は

$${}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot 3! \text{ 通り}$$

であり、このうち積が奇数になるのは ${}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot 3!$ 通りなので積が偶数になるのは

$$({}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot 3! - {}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot 3!) \text{ 通り}$$

である。これらの事象は互いに排反なので、求める確率は

$$\frac{{}_4P_3 + ({}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot 3! - {}_2C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot 3!)}{{}_9P_3} = \frac{13}{42}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{42}$$

Ⅲ

(1)

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ であるから

$$f(x) = t^3 - 9t + \frac{3}{2}(1 - 2t^2) + a$$

$$\Leftrightarrow f(x) = t^3 - 3t^2 - 9t + \frac{3}{2} + a$$

である。

$$(答) f(x) = t^3 - 3t^2 - 9t + \frac{3}{2} + a$$

(2)

$g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + \frac{3}{2} + a$ とおく。 $t = \sin x$ より、 $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の最小値と最大値を

調べる。 $g(t)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 3t^2 - 6t - 9 \\ &= 3(t-3)(t+1) \end{aligned}$$

より、 $-1 \leq t \leq 1$ における $g(t)$ の増減表は下のようになる。

t	-1	...	1
$g'(t)$		-	
$g(t)$	$g(-1)$	$\searrow$	$g(1)$

したがって、増減表より、 $g(t)$ の最大値は $g(-1) = \frac{13}{2} + a$ であり、 $g(t)$ の最小値は

$g(1) = -\frac{19}{2} + a$ である。 $g(t)$ の $-1 \leq t \leq 1$ における最大値、最小値は $f(x)$ の最大値、最小値に

一致するので、 $f(x)$ の最大値は、 $\frac{13}{2} + a$ であり、最小値は、 $-\frac{19}{2} + a$ である。

$$(答) \text{ 最大値 } \frac{13}{2} + a, \text{ 最小値 } -\frac{19}{2} + a$$

(3)

(2)の結果より $f(x)$ の最大値、最小値の絶対値が等しくなるのは

$$\left| \frac{13}{2} + a \right| = \left| -\frac{19}{2} + a \right| \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

より $a = \frac{3}{2}$ のときである。また、 $f(x)$ の最大値、最小値が0になるのは

$$\begin{aligned} \frac{13}{2} + a &= 0 \Leftrightarrow a = -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} + a &= 0 \Leftrightarrow a = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

よりそれぞれ $a = -\frac{13}{2}$, $a = \frac{19}{2}$ のときである。これらのことに注意して以下のような場合分けを考える。

[1] $a < -\frac{13}{2}$ のとき

常に $f(x) < 0$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $\frac{19}{2} - a$ であり、最小値は $-\frac{13}{2} - a$ である。

[2] $-\frac{13}{2} \leq a < \frac{3}{2}$ のとき

$f(x) = 0$ は解をもち、また $\left| \frac{13}{2} + a \right| < \left| -\frac{19}{2} + a \right|$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $\frac{19}{2} - a$ であり、最小値は0である。

[3] $\frac{3}{2} \leq a < \frac{19}{2}$ のとき

$f(x) = 0$ は解をもち、また $\left| \frac{13}{2} + a \right| \geq \left| -\frac{19}{2} + a \right|$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $\frac{13}{2} + a$ であり、最小値は0である。

[4] $\frac{13}{2} \leq a$ のとき

常に $f(x) \geq 0$ であるから $|f(x)|$ の最大値は $\frac{13}{2} + a$ であり、最小値は $-\frac{19}{2} + a$ である。

以上、[1]~[4]より $|f(x)|$ の最大値は

$$a < \frac{3}{2} \text{ のとき } \frac{19}{2} - a, \quad a \geq \frac{3}{2} \text{ のとき } \frac{13}{2} + a$$

であり、最小値は

$$a < -\frac{13}{2} \text{ のとき } -\frac{13}{2} - a, \quad -\frac{13}{2} \leq a < \frac{19}{2} \text{ のとき } 0, \quad \frac{19}{2} \leq a \text{ のとき } -\frac{19}{2} + a$$

である。

$$(答) \text{ 最大値 } \left\{ \begin{array}{l} \frac{19}{2} - a \quad (a < \frac{3}{2} \text{ のとき}), \text{ 最小値 } \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{13}{2} - a & (a < -\frac{13}{2} \text{ のとき}) \\ 0 & (-\frac{13}{2} \leq a < \frac{19}{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{19}{2} + a & (\frac{19}{2} \leq a \text{ のとき}) \end{array} \right. \\ \frac{13}{2} + a \quad (a \geq \frac{3}{2} \text{ のとき}) \end{array} \right.$$