

I

【解答】

(1)	$2x-5$
(2)	$\frac{2}{3}$
(3)	$a=\frac{1}{2}$
(4)	$\theta=\frac{\pi}{2}$
(5)	$a_n=4^n-1$
(6)	$f(x)=4x^3-\frac{3}{2}x^2$

【解説】

(1)

剰余の定理より、

$$\begin{cases} P(-2)=-9 & \cdots \textcircled{1} \\ P(3)=1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。 $P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの商を整式 $Q(x)$ とする。 x^2-x-6 は2次式であるから、 $P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りは、実数 a, b を用いて $ax+b$ 表すことができる。よって、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-6)Q(x)+ax+b \\ \Leftrightarrow P(x) &= (x+2)(x-3)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} P(-2) &= -9 \\ \Leftrightarrow (-2+2)(-2-3)Q(-2)+a\cdot(-2)+b &= -9 \\ \Leftrightarrow -2a+b &= -9 & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が得られ、 $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} P(3) &= 1 \\ \Leftrightarrow (3+2)(3-3)Q(3)+a\cdot 3+b &= 1 \\ \Leftrightarrow 3a+b &= 1 & \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が得られる。 $\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より、

$$a=2, b=-5$$

が導かれるから、 $P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りは $2x-5$ である。

(2)

まず、A, B, C, D の4文字を横1列に並べる並べ方の総数は、

$$4!=24 \text{ (通り)}$$

である。A, B, C, D の4文字を横1列に並べるとき、「AがBより左にあるかまたはAがCより左にある」事象の余事象は、「AがBより右にあり、かつAがCより右にある」事象である。したがって、余事象の場合の数を求めればよい。「AがBより右にあり、かつAがCより右にある」とき、文字の並べ方は

$$\begin{aligned} [1] & \text{ } \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{A} \\ [2] & \text{ } \bigcirc \bigcirc \text{A D} \end{aligned}$$

のいずれかである。 $[1]$ の場合、並べ方の総数は

$$3!=6 \text{ (通り)}$$

であり、 $[2]$ の場合、並べ方の総数は

$$2!=2 \text{ (通り)}$$

である。よって、余事象が起こる確率は、

$$\frac{6+2}{24}=\frac{1}{3}$$

であり、求める確率は

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

である。

(3)

底の変換公式を用いて与式を変形すると、

$$\begin{aligned} \log_2 3 &= a \log_{\sqrt{2}} 3 \\ \Leftrightarrow \log_2 3 &= a \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \log_2 3 &= a \cdot \frac{\log_2 3}{\frac{1}{2}} \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \text{ } (\because \log_2 3 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

(4)

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ が垂直であるから、

$$\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{6}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta - \frac{2}{3}|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 2^2 + \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\theta - \frac{2}{3} \cdot 3^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

である。

(5)

漸化式を変形すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n+3 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}+1 &= 4(a_n+1) \end{aligned}$$

となる。よって、数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=4$ 、公比4の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} a_n+1 &= 4 \cdot 4^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 4^n-1 \end{aligned}$$

である。

(6)

$\int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから、これを定数 a とすると、

$$f(x)=4x^3-3ax^2$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 (4t^3-3at^2)dt \\ &= \left[t^4-at^3 \right]_0^1 \\ &= (1^4-a \cdot 1^3)-(0^4-a \cdot 0^3) \\ &= 1-a \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= a \\ \Leftrightarrow 1-a &= a \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$f(x)=4x^3-\frac{3}{2}x^2$$

である。

II

(1)

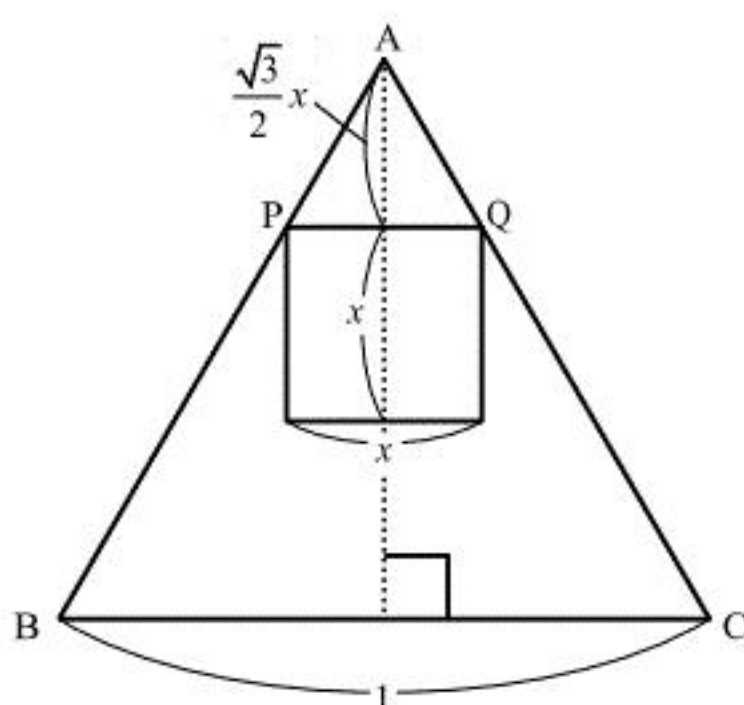
線分 PQ は $\triangle ABC$ の内部にあるから、 x の動く範囲は $0 < x < 1$ である。ここで、 $\triangle APQ$ は 1 辺の長さが x の正三角形であるから、点 A と直線 PQ の距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ となる。よって、点 A と正方形の下辺の距離は、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x$$

と表せる。以下、正方形が $\triangle ABC$ の内部にある場合と、一部のみが内部にある場合に分けて考える。

[1] 正方形が完全に $\triangle ABC$ の内部にある場合

このとき、 $\triangle ABC$ のと正方形の位置関係は下図のようになる。



$\triangle ABC$ の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、正方形が $\triangle ABC$ の内部にある条件は、

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x \Leftrightarrow 0 < x \leq 2\sqrt{3} - 3 \quad (\because 0 < x < 1)$$

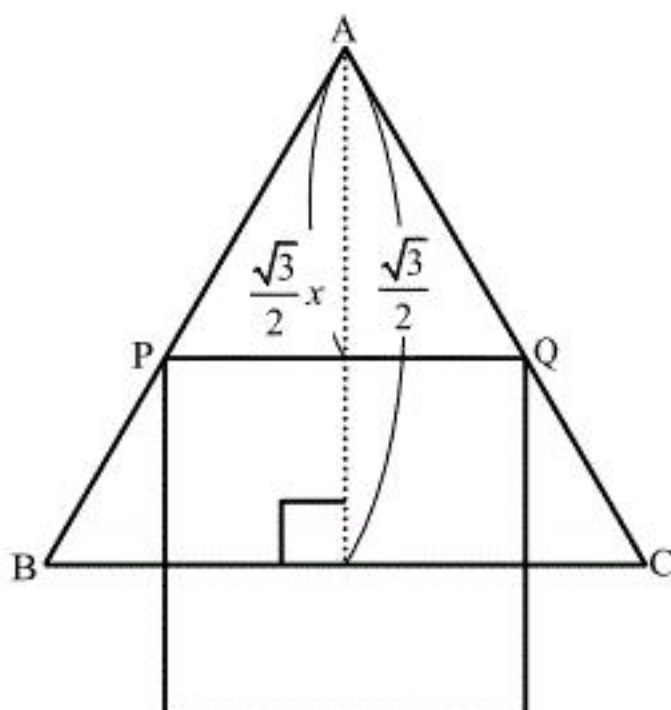
であり、このときの正方形の面積は

$$y = x^2$$

である。

[2] 正方形の一部のみが $\triangle ABC$ の内部にある場合

このとき、 $\triangle ABC$ と正方形の位置関係は下図のようになる。



上図より、正方形の下辺と辺 PQ の距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$ と表せる。[1]より、正方形の一部のみが $\triangle ABC$ の内部にある条件は、

$$2\sqrt{3} - 3 < x < 1$$

であり、このときの面積は

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$$

である。

以上[1], [2]より、求める面積 y は、

$$y = \begin{cases} x^2 & (0 < x \leq 2\sqrt{3} - 3) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x) & (2\sqrt{3} - 3 < x < 1) \end{cases}$$

である

(答) 前述

(2)

$0 < x \leq 2\sqrt{3} - 3$ のとき、面積 y は $x = 2\sqrt{3} - 3$ のとき最大値をとる。一方で、 $2\sqrt{3} - 3 < x < 1$ のとき

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

と変形できるから、 $x = \frac{1}{2} (> 2\sqrt{3} - 3)$ のとき y は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{8}$ をとる。いま、 $x = 2\sqrt{3} - 3$ のときも

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ は成り立ち、 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ のグラフは上に凸な放物線であるから、

$x = 2\sqrt{3} - 3$ のときの値よりも $\frac{\sqrt{3}}{8}$ は大きい。したがって、 y の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{8}$ である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

Ⅲ

(1)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \text{ より,}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

である。従って、点 $(a, f(a))$ における、 $y = f(x)$ のグラフの接線の方程式は、

$$y = (3a^2 + 6a)(x - a) + a^3 + 3a^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow y = (3a^2 + 6a)x - 2a^3 - 3a^2 - 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (3a^2 + 6a)x - 2a^3 - 3a^2 - 2$$

(2)

(1)で求めた接線の方程式に $x=1, y=-2$ を代入すると、

$$-2 = (3a^2 + 6a) \cdot 1 - 2a^3 - 3a^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2a^3 - 6a = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) = 0$$

となるから、求める a の値は、

$$a = 0, \pm\sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = 0, \pm\sqrt{3}$$

(3)

(1)で求めた接線の方程式から、 a の値が $0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ のときの接線の方程式は、それぞれ

$$y = -2$$

$$y = (9 - 6\sqrt{3})x + 6\sqrt{3} - 11$$

$$y = (9 + 6\sqrt{3})x - 6\sqrt{3} - 11$$

である。また、

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$= 3x(x + 2)$$

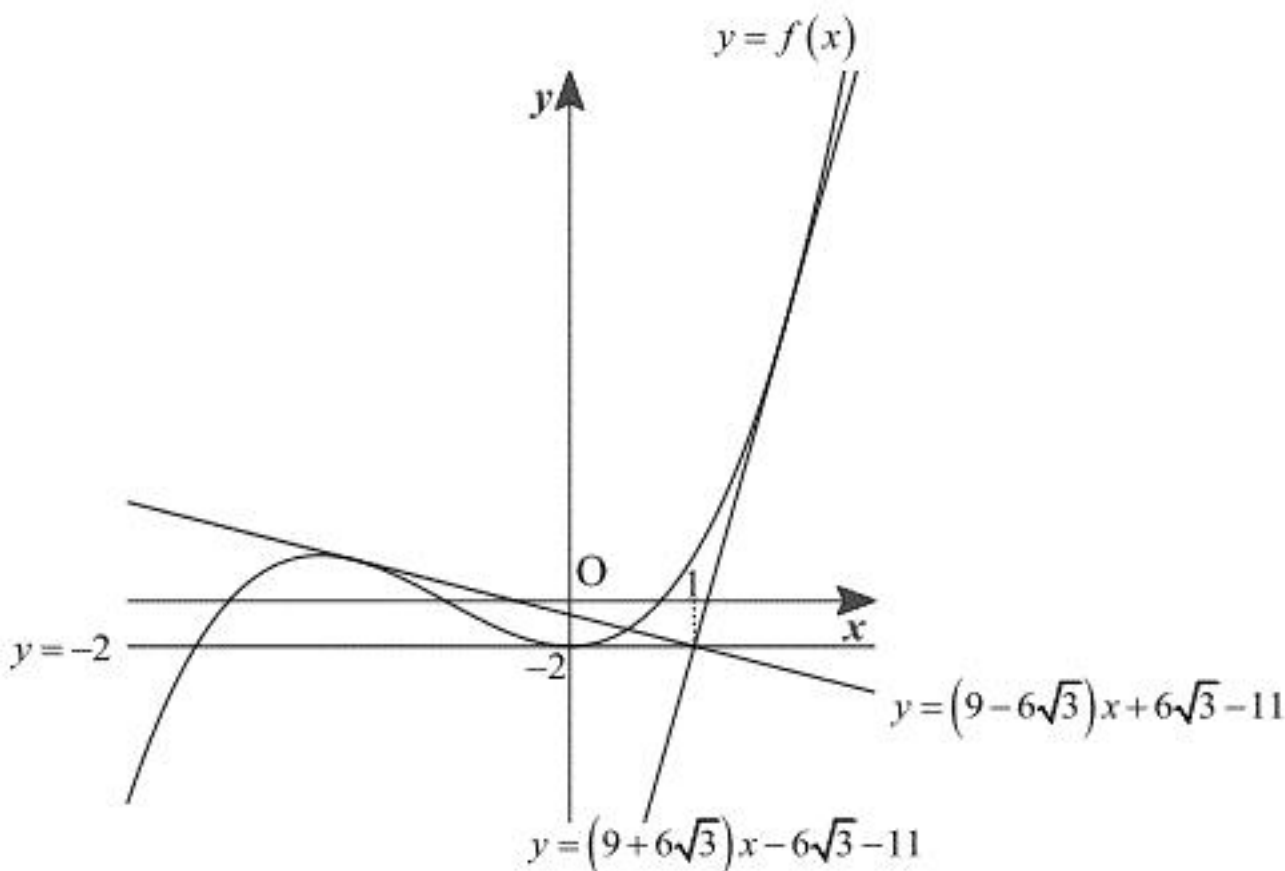
より、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, -2$$

であることから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

以上より、 $y = f(x)$ と、点 $(1, -2)$ を通る 3 本の接線は以下のグラフのようになる。



ここで、直線 $y = k(x - 1) - 2$ は、点 $(1, -2)$ を通り、傾きが k の直線である。よって上図から、直線 $y = k(x - 1) - 2$ と曲線 $y = f(x)$ のグラフが相異なる 3 点で交わるような実数 k の値の範囲は、

$$9 - 6\sqrt{3} < k < 0, 9 + 6\sqrt{3} < k$$

である。

$$(\text{答}) \quad 9 - 6\sqrt{3} < k < 0, 9 + 6\sqrt{3} < k$$