

【解答】

(1)	3	(4)	(8, 5)
(2)	$a = -1, b = -3$	(5)	$y = x + 2$
(3)	$\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha$	(6)	$a = \frac{3}{2}$

【解説】

(1)

$$729 = 3^6 \text{ より}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$$

$$= \sqrt[3]{3^3}$$

$$= 3$$

である。

(2)

$$\begin{cases} 1 \in \{x \mid ax^2 + 4x + b = 0\} \\ 3 \in \{x \mid ax^2 + 4x + b = 0\} \end{cases}$$

であるため

$$\begin{cases} a \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + b = 0 \\ a \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + b = 0 \end{cases}$$

が成立することが必要条件である。これを解いて $a = -1, b = -3$ を得る。逆に $-x^2 + 4x - 3 = 0$ の解は

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 3$$

であるので、 $\{x \mid ax^2 + 4x + b = 0\} = \{1, 3\}$ が成り立つような定数 a, b は

$$a = -1, b = -3$$

である。

(3)

$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ において $\sin \alpha, \tan \alpha$ は連続で単調増加であり、 $\cos \alpha$ は連続で単調減少であるから

$$\sin \frac{\pi}{4} < \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2} < \cos \alpha < \cos \frac{\pi}{4}, \tan \frac{\pi}{4} < \tan \alpha$$

である。よって $0 < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \alpha < 1 < \tan \alpha$ が成り立つため、小さい順に並べると

$$\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \alpha$$

となる。

(4)

求める点の座標を $Q(a, b)$ (a, b は実数) とおく。線分 PQ の中点 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ は直線

$2x + y = 16$ 上にあるため

$$2 \cdot \frac{a+4}{2} + \frac{b+3}{2} = 16$$

$$\Leftrightarrow 2a + b = 21 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、直線 PQ と直線 $2x + y = 16$ は直交するため直線 PQ の方向ベクトル

$\vec{m} = (a-4, b-3)$ と直線 $2x + y = 16$ の方向ベクトル $\vec{n} = (1, -2)$ について、

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4) - 2(b-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 2b = -2 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①、②より $(a, b) = (8, 5)$ であるから、求める点の座標は $(8, 5)$ である。

(5)

題意を満たすような接線と曲線 $y = x^3 - 2x$ の接点の座標を $(p, p^3 - 2p)$ (p は実数) とおく。

$y' = 3x^2 - 2$ より接線の傾きは $3p^2 - 2$ であるから、接線の方程式は、

$$y - (p^3 - 2p) = (3p^2 - 2)(x - p)$$

$$\Leftrightarrow y = (3p^2 - 2)x - 2p^3 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。この接線上に点 $(1, 3)$ があるので

$$3 = (3p^2 - 2) \cdot 1 - 2p^3$$

$$\Leftrightarrow 2p^3 - 3p^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p+1)(2p^2 - 5p + 5) = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。ここで

$$2p^2 - 5p + 5 = 2\left(p - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} > 0$$

より④の解は $p = -1$ である。よって求める接線の方程式は③より

$$y = x + 2$$

である。

(6)

等式はすべての実数 x で成り立つので $x = 2$ のときも等式は成り立つ。したがって

$$0 = -2^2 + 2a + 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

である。逆にこのとき、与式の両辺を微分すると

$$f(x) = -2x + \frac{3}{2}$$

となり、

$$\int_2^x f(t) dt = \left[-t^2 + \frac{3}{2}t\right]_2^x$$

$$= -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

が成り立つ。よって

$$a = \frac{3}{2}$$

である。

II

(1)

チーム A が 4 勝 1 敗で優勝するのは 4 試合目までに 3 勝 1 敗し、5 試合目に勝つときである。
したがって求める確率は

$${}_4C_1 \cdot p^3(1-p) \cdot p = 4p^4(1-p)$$

である。

$$(\text{答}) \quad 4p^4(1-p)$$

(2)

第 6 試合までに優勝チームが決定しないのはチーム A, B がともに 3 勝するときである。この確率は

$${}_6C_3 \cdot p^3(1-p)^3 = 20p^3(1-p)^3$$

であるから、第 6 試合までに優勝チームが決定する確率は

$$1 - 20p^3(1-p)^3$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 - 20p^3(1-p)^3$$

(3)

チーム A の勝敗の回数によって場合分けをして考える。

[1] 4 勝 0 敗でチーム A が優勝するとき

その確率は

$$p^4$$

である。

[2] 4 勝 1 敗でチーム A が優勝するとき

(1)よりその確率は

$$4p^4(1-p)$$

である。

[3] 4 勝 2 敗でチーム A が優勝するとき

5 試合目までに 3 勝 2 敗し、6 試合目に勝つ確率であるため、求める確率は

$${}_5C_2 \cdot p^3(1-p)^2 \cdot p = 10p^4(1-p)^2$$

である。

[4] 4 勝 3 敗でチーム A が優勝するとき

6 試合目までに 3 勝 3 敗し、7 試合目に勝つ確率であるため、求める確率は、

$${}_6C_3 \cdot p^3(1-p)^3 \cdot p = 20p^4(1-p)^3$$

である。

以上[1]~[4]は互いに排反な事象であるから、チーム A が優勝する確率は

$$p^4 \left\{ 1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2 + 20(1-p)^3 \right\}$$

である。 $p = \frac{1}{3}$ を代入して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(1 + 4 \cdot \frac{2}{3} + 10 \cdot \frac{4}{9} + 20 \cdot \frac{8}{27} \right) &= \frac{1}{81} \cdot \frac{379}{27} \\ &= \frac{379}{2187} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{379}{2187}$$

III

(1)

$3^x, 3^{-x}$ は正の実数であるため、相加平均・相乗平均の大小関係より、

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{-x} &\geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

であり、等号成立は

$$\begin{aligned} 3^x &= 3^{-x} \\ \Leftrightarrow 3^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

である。よって t は 2 以上の実数をすべてとりうる。

(答) $t \geq 2$

(2)

$$\begin{aligned} t^2 &= (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + (3^{-x})^2 \\ &= 9^x + 2 + 9^{-x} \end{aligned}$$

より $9^x + 9^{-x} = t^2 - 2$ である。また

$$\begin{aligned} t^3 &= (3^x)^3 + 3 \cdot (3^x)^2 3^{-x} + 3 \cdot 3^x (3^{-x})^2 + (3^{-x})^3 \\ &= 27^x + 3(3^x + 3^{-x}) + 27^{-x} \end{aligned}$$

より $27^x + 27^{-x} = t^3 - 3t$ である。以上より

$$\begin{aligned} f(x) &= (t^3 - 3t) - (t^2 - 2) + t - 14 \\ &= t^3 - t^2 - 2t - 12 \end{aligned}$$

である。

(答) $f(x) = t^3 - t^2 - 2t - 12$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 2t - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-3)(t^2 + 2t + 4) &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで

$$t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3 > 0$$

より解は $t=3$ である。したがって

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{-x} &= 3 \\ \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $y=3^x$ とおくと

$$\begin{aligned} y^2 - 3y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

が得られる。よって $f(x)=0$ の解は

$$x = \log_3 \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

である。ここで、 $2^2 < 5 < 3^2$ より $2 < \sqrt{5} < 3$ であるから

$$\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3, 0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$$

となる。したがって

$$\log_3 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) > 0, \log_3 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) < 0$$

となるから $f(x)=0$ を満たす正の実数は

$$x = \log_3 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$$

である。

(答) $x = \log_3 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$