

2020 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類があります。
2. 解答は、必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となります。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。
6. マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないようにしてください。
7. 一度記入したマークを修正する場合、しっかりと消してください。消し残しがあると、マーク読み取り装置が反応して解答が無効となることがあります。
8. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

座標空間において、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径1の球面を S とする。 S 上の定点 $N(0, 0, 1)$ を考え、 N と異なる S 上の点 $P(x, y, z)$ に対して、 xy 平面上の点 $Q(u, v, 0)$ で

$$\overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP} \quad (t > 0)$$

となるものを対応させる。このとき

$$\boxed{\text{ア}} : 1 = 1 : t$$

であるから

$$t = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}}, \quad Q\left(\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{ア}}}, 0\right)$$

となる。

x 軸に垂直な平面 $x = d$ ($0 < d < 1$) を H とする。球面 S と平面 H が交わってできる図形 C 上を点 P が動くとき、 P に対応する点 Q が描く図形の方程式は

$$\left(u - \boxed{\text{エ}}\right)^2 + v^2 = \boxed{\text{オ}}$$

であり、 u の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

さらに、 C 上の定点 $P_1(d, 0, \sqrt{1-d^2})$ に対応する xy 平面上の点を Q_1 とする。このとき、

$$\overrightarrow{NQ} \cdot \overrightarrow{NQ_1} = u \times \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}$$

であり、この内積は点 P の座標が $(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}})$ のとき最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

問題Ⅰのア、イ、ウの解答群

- | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| Ⓐ x | Ⓑ y | Ⓒ z |
| Ⓓ $\frac{1}{x}$ | Ⓔ $\frac{1}{y}$ | Ⓕ $\frac{1}{z}$ |
| Ⓖ $1-x$ | Ⓗ $1-y$ | Ⓖ $1-z$ |
| Ⓙ $\frac{1}{1-x}$ | Ⓚ $\frac{1}{1-y}$ | Ⓛ $\frac{1}{1-z}$ |

問題Ⅰのエ、オ、カ、キ、ク、ケ、コ、サ、シの解答群

- | | | |
|--|--|--|
| Ⓐ -2 | Ⓑ -1 | Ⓒ 0 |
| Ⓓ 1 | Ⓔ 2 | Ⓕ $-d$ |
| Ⓖ d | Ⓗ $\frac{1}{d}$ | Ⓖ $\frac{1-d^2}{d^2}$ |
| Ⓙ $1-d^2$ | Ⓚ $\sqrt{1-d^2}$ | Ⓛ $-\sqrt{1-d^2}$ |
| Ⓜ $d + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ | Ⓝ $d - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ | ⓐ $\frac{1}{d} + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ |
| Ⓟ $\frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ | Ⓤ $\frac{1}{d} + \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$ | Ⓡ $\frac{1}{d} - \frac{\sqrt{1-d^2}}{d^2}$ |

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

サイコロを振って数直線上にある点 R を動かす。3 または 6 の目が出た場合は R を正の方向に 2 動かし、それ以外の目が出た場合は負の方向に 1 動かし。最初に R が原点にあったとして、 n 回サイコロを振った後に R が点 x にある確率を $P_n(x)$ (ただし x は整数) とおく。与えられた n に対し、 $P_n(x)$, $xP_n(x)$ を最大にする x を求めてみよう。

n 回サイコロを振ったうち、3 または 6 の目が出た回数を s とすれば、 R の位置は $x = 2s - (n - s) = 3s - n$ であり、 $P_n(x) = \boxed{\text{ス}}$ が成り立つ。 $P_n(x)$ が最大となるためには

$$\frac{P_n(x-3)}{P_n(x)} = \boxed{\text{セ}} \leq 1, \quad \frac{P_n(x+3)}{P_n(x)} = \boxed{\text{ソ}} \leq 1$$

が必要であり、このとき $\boxed{\text{タ}} \leq 3s = x + n \leq \boxed{\text{チ}}$ が成り立つ。したがって $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $n = 3k - 2$ のときは $P_n(-1)$ が最大、 $n = 3k - 1$ のときは $P_n(-2) = P_n(1)$ が最大、 $n = 3k$ のときは $P_n(0)$ が最大となる。

次に $xP_n(x)$ を最大にする x を求めよう。そのような $x = 3s - n$ は正である。 $Q_n(s) = (3s - n) \times P_n(3s - n)$ とおくと、 $Q_n(s) = (3s - n) \times \boxed{\text{ス}}$ である。したがって、 $s > 0$, $Q_n(s) > 0$ ならば

$$\frac{Q_n(s+1)}{Q_n(s)} = \boxed{\text{ツ}}$$

であり、この比が 1 以下になる必要十分条件は $\boxed{\text{テ}} \geq 0$, すなわち $3s \geq \boxed{\text{ト}}$ である。以上により、 $L = \boxed{\text{ト}}$ とおくと、 L が整数で 3 の倍数である場合、 $Q_n(s) = xP_n(x)$ は s が $\boxed{\text{ナ}}$ のとき最大である。それ以外の場合は、 s が $\boxed{\text{ニ}}$ のときが最大である。

問題 II の ス の解答群

Ⓐ $\frac{n!}{s!(n-s)!3^n}$ Ⓑ $\frac{n!2^s}{s!(n-s)!3^n}$ Ⓒ $\frac{n!2^{n-s}}{s!(n-s)!3^n}$ Ⓓ $\frac{n!2^n}{s!(n-s)!3^n}$

問題 II の セ, ソ の解答群

Ⓐ $\frac{s}{2(n-s+1)}$ Ⓑ $\frac{s}{2(n-s)}$ Ⓒ $\frac{2s}{n-s}$ Ⓓ $\frac{2s}{n-s+1}$
Ⓔ $\frac{n-s-1}{2(s+1)}$ Ⓕ $\frac{n-s}{2(s+1)}$ Ⓖ $\frac{2(n-s-1)}{s+1}$ Ⓗ $\frac{2(n-s)}{s+1}$

問題 II の タ, チ の解答群

Ⓐ $n-3$ Ⓑ $n-2$ Ⓒ $n-1$ Ⓓ n Ⓔ $n+1$ Ⓕ $n+2$ Ⓖ $n+3$

問題 II の ツ の解答群

Ⓐ $\frac{(3s-n+3)(n-s-1)}{2(3s-n)(s+1)}$ Ⓑ $\frac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)(s+1)}$
Ⓒ $\frac{(3s-n+3)(n-s)}{2(3s-n)s}$ Ⓓ $\frac{(3s-n+3)(n-s+1)}{2(3s-n)(s+1)}$

問題 II の テ の解答群

Ⓐ $9s^2 - 3(2n+3)s + (n+3)(n-2)$ Ⓑ $9s^2 - 3(2n+1)s + (n+2)(n-3)$
Ⓒ $9s^2 - 3(2n-1)s + (n+1)(n-4)$ Ⓓ $9s^2 - 3(2n-3)s + n(n-5)$

問題 II の ト の解答群

Ⓐ $n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{8n+9}}{2}$ Ⓑ $n - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8n+17}}{2}$ Ⓒ $n + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8n+25}}{2}$

問題 II の ナ, ニ の解答群

Ⓐ $\frac{L}{3}$ より小さい最大の整数 Ⓑ $\frac{L}{3}$
Ⓒ $\frac{L}{3}$ より大きい最小の整数 Ⓓ $\frac{L}{3}$ または $\frac{L}{3} + 1$

(設問は次のページにつづく)

III 原点 O を中心とする半径 1 の円周上に 2 点 $Q(\cos a, \sin a)$, $R(\cos(a+b), \sin(a+b))$ をとる。ただし a, b は $a > 0, b > 0, a + b < \frac{\pi}{2}$ を満たす。また、点 Q から x 軸へ下ろした垂線の足を点 P とし、点 R から y 軸へ下ろした垂線の足を点 S とする。 $\triangle OPQ$ の面積と $\triangle ORS$ の面積の和を A 、五角形 $OPQRS$ の面積を B とおく。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) A を a と b で表せ。

(2) b を固定して、 a を $0 < a < \frac{\pi}{2} - b$ の範囲で動かすとき、 A がとりうる値の範囲を b で表し、 A が最大値をとるときの a の値を b で表せ。

(3) B は $a = \frac{\pi}{8}$, $b = \frac{\pi}{4}$ のときに最大値をとることを示せ。

(設問は次のページにつづく)

IV $a > 1$ とし, $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \frac{1}{x^2} a^{-\frac{1}{x}}$ に対して, 曲線 $C: y = f(x)$ を考える。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) $f'(x)$ を求めよ。
- (2) y が最大値をとる x の値 b を求め, 曲線 C の概形をかけ。ただし, 凹凸は調べなくてよい。また, 必要であれば $\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-2} a^s = \infty$ を用いてよい。
- (3) 曲線 C の点 $P(t, f(t))$ での接線 ℓ が原点 O を通るとき, t の値と ℓ の方程式を求めよ。
- (4) $t \leq x \leq b$ の範囲において, 曲線 C と直線 ℓ および直線 $x = b$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし, b, t, ℓ は (2), (3) で求めたものとする。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

