

I

(1)

1回のじゃんけんをした後に、A, B, Cが時計回りに回るのは1回のじゃんけんでBだけが勝つ場合である。このときBが出す手は3通りであり、それに対しA, Cの出す手は1通りずつである。すべての場合の数は $3^3 = 27$ 通りであるから、求める確率 q は

$$\begin{aligned} q &= \frac{3 \cdot 1}{27} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad q = \frac{1}{9}$$

(2)

1回のじゃんけんをした後に、A, B, Cが反時計回りに回る確率は、(1)と同様にして、 $\frac{1}{9}$ となる。1回のじゃんけんをした後に、Aが動かない事象は、「1回のじゃんけんをした後に、A, B, Cが時計回りに回る、または、A, B, Cが反時計回りに回る」という事象の余事象である。これらの事象は互いに排反であるから、求める確率 p は

$$\begin{aligned} p &= 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p = \frac{7}{9}$$

(3)

n 回のじゃんけんをした後にAが初めの位置から1つ時計回りに移った席にいる確率を r_n 、反時計回りに移った席にいる確率を s_n とおくと

$$\begin{aligned} p_n + r_n + s_n &= 1 \\ \Leftrightarrow r_n + s_n &= 1 - p_n \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $n+1$ 回のじゃんけんをした後にAが初めの位置にもどるという場合には
 n 回のじゃんけんをした後にAが初めの位置に戻っており、 $n+1$ 回目のじゃんけんでAが動かない場合
 n 回のじゃんけんをした後にAが初めの位置から1つ時計回りに移った席におり、 $n+1$ 回目のじゃんけんでAが反時計回りに移る場合
 n 回のじゃんけんをした後にAが初めの位置から1つ反時計回りに移った席におり、 $n+1$ 回目のじゃんけんでAが時計回りに移る場合

の3つの場合が考えられる。これらは互いに排反であるから、(1), (2)の結果と①より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{7}{9} p_n + \frac{1}{9} r_n + \frac{1}{9} s_n \\ &= \frac{7}{9} p_n + \frac{1}{9} (r_n + s_n) \\ &= \frac{7}{9} p_n + \frac{1}{9} (1 - p_n) \\ &= \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

(3)で得られた漸化式より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3} p_n + \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} \left(p_n - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。 $p_1 = p = \frac{7}{9}$ であるから、数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{3} \right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。よって

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{3} &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$$

II

(1)

α の値で場合分けして考える。

[1] $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

A(1, 1) となるから、直線 AC の方程式は

$$x=1$$

である。

[2] $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

直線 AC の方程式は

$$y-0=\frac{\sin \alpha-0}{(1+\cos \alpha)-1}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow y=(x-1) \tan \alpha$$

となる。

以上[1], [2]より、直線 AC の方程式は、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき $x=1$ 、 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のとき $y=(x-1) \tan \alpha$ である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } x=1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } y=(x-1) \tan \alpha$$

(2)

α の値で場合分けして考える。

[1] $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

$x=1$ と B(2+2cos β , 2sin β) の距離を考えればよいから

$$d=|(2+2 \cos \beta)-1|$$

$$=|1+2 \cos \beta|$$

である。

[2] $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

直線 AC の方程式は $(\tan \alpha) x-y-\tan \alpha=0$ と表せるから、点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned} d &= \frac{|(\tan \alpha)(2+2 \cos \beta)-2 \sin \beta-\tan \alpha|}{\sqrt{(\tan \alpha)^2+(-1)^2}} \\ &=|\cos \alpha| |(\tan \alpha)(1+2 \cos \beta)-2 \sin \beta| \left(\because \frac{1}{\sqrt{1+\tan ^2 \alpha}}=|\cos \alpha| \right) \\ &=|\sin \alpha+2(\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta)| \\ &=|\sin \alpha+2 \sin (\alpha-\beta)| \end{aligned}$$

となる。[1]より、これは $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のときも成り立つ。

以上[1], [2]より

$$d=|\sin \alpha+2 \sin (\alpha-\beta)|$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad d=|\sin \alpha+2 \sin (\alpha-\beta)|$$

(3)

$0<\alpha<\pi, -\pi<\beta<\pi$ より、 $-\pi<\alpha-\beta<2\pi$ をとり得る。よって、

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき } -1<\sin (\alpha-\beta) \leq 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } -1 \leq \sin (\alpha-\beta) \leq 1$$

となる。 $0<\alpha<\pi$ より $\sin \alpha>0$ であるから、 α を固定して β を動かすとき、 d の最大値は

$$|\sin \alpha+2 \cdot 1|=\sin \alpha+2$$

と表せる。このとき、

$$\sin (\alpha-\beta)=1$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha+2$$

(4)

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2} \cdot AC \cdot d$$

と表せる。ここで

$$\begin{aligned} AC^2 &= \{(1+\cos \alpha)-1\}^2+(\sin \alpha-0)^2 \\ &= \cos ^2 \alpha+\sin ^2 \alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore AC=1 \quad (\because AC>0)$$

であるから

$$S=\frac{1}{2} d$$

となる。 d が最大となるとき S も最大となるから d が最大となる α, β の値を求めればよい。

(3)の結果から $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ かつ $\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき d は最大となる。よって、

$$\begin{cases} \alpha=\frac{\pi}{2} \\ \beta=0 \end{cases}$$

のとき d は最大となる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積 S が最大となるとき

$$A(1, 1), B(4, 0)$$

であり、 S の最大値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left| \sin \frac{\pi}{2}+2 \sin \frac{\pi}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1+2) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A(1, 1), B(4, 0), \quad S \text{ の最大値: } \frac{3}{2}$$

Ⅲ

(1)

曲線①は点 (b, kb) を通るから、 $b > 0$ であることに注意して

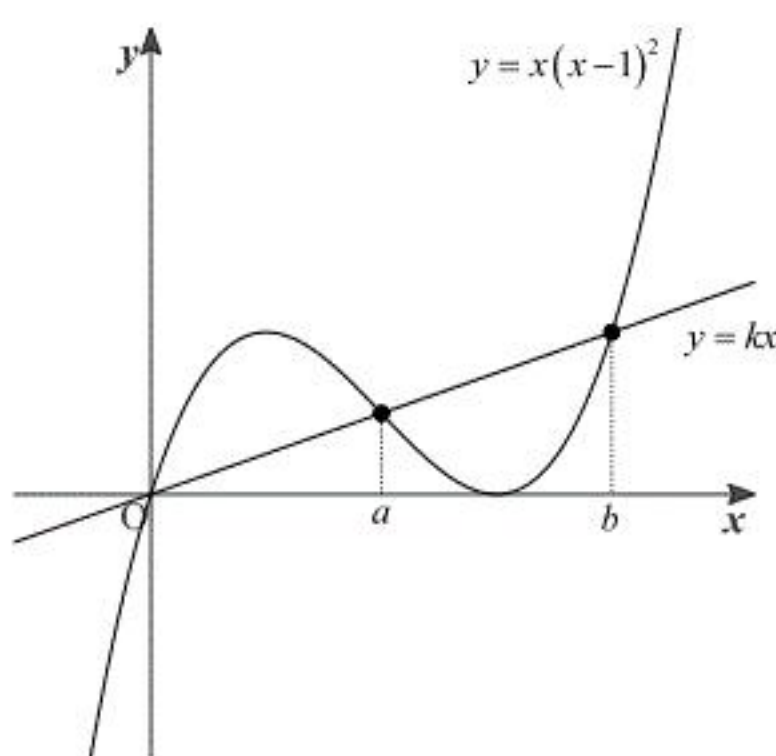
$$\begin{aligned} kb &= b(b-1)^2 \\ \Leftrightarrow k &= (b-1)^2 \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad k = (b-1)^2$$

(2)

曲線①と直線②を図示すると下図のようになる。



よって、曲線①と直線②とが囲む2つの図形の面積が等しいとき

$$\int_0^a \{x(x-1)^2 - kx\} dx = \int_a^b \{kx - x(x-1)^2\} dx$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^a \{x(x-1)^2 - kx\} dx &= \int_a^b \{kx - x(x-1)^2\} dx \\ \Leftrightarrow \int_0^a \{x(x-1)^2 - kx\} dx + \int_a^b \{x(x-1)^2 - kx\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^b \{x(x-1)^2 - kx\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \int_0^b \{x^3 - 2x^2 + (1-k)x\} dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1-k)x^2 \right]_0^b &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^4 - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{2}(1-k)b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}(1-k) &= 0 \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}(1-k) = 0$$

(3)

(1)より、 $k = (b-1)^2 = b^2 - 2b + 1$ と表せるから、(2)で得られた関係式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{2}(2b - b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b(4 - 3b) &= 0 \\ \therefore b &= \frac{4}{3} \quad (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、求める k の値は

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{4}{3} - 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{1}{9}$$