

I

a が正の実数で、実数 $5a$ の小数部分が a と等しいことから、 a は小数であり

$$0 < a < 1$$

である。また、これらの差である

$$5a - a = 4a$$

は整数であるから、自然数 n を用いて

$$4a = n$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{n}{4}$$

とおける。 $0 < a < 1$ より $n=1, 2, 3$ のときに題意を満たし、このとき

$$a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

である。

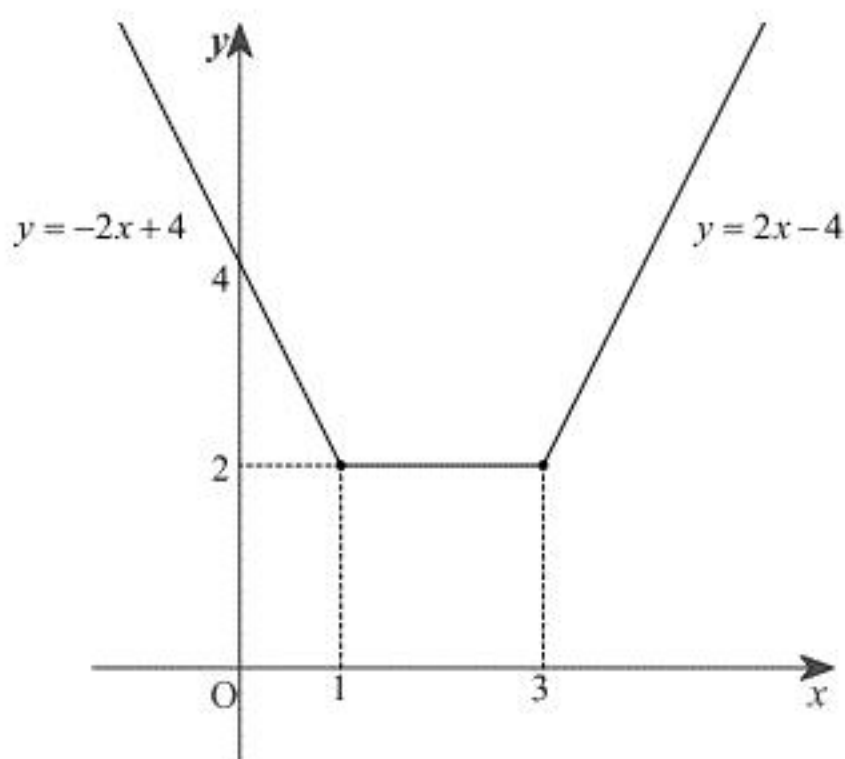
$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

Ⅱ

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x-1| + |x-3| \\
 &= \begin{cases} -(x-1) - (x-3) & (x < 1) \\ (x-1) - (x-3) & (1 \leq x \leq 3) \\ (x-1) + (x-3) & (3 < x) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -2x+4 & (x < 1) \\ 2 & (1 \leq x \leq 3) \\ 2x-4 & (3 < x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



したがって $f(x)$ は $1 \leq x \leq 3$ のとき最小値 2 をとる。

(答) 2

(2)

$$h(x) = x^2 - 4x + 9$$

とすると

$$h(x) = (x-2)^2 + 5$$

と変形できることから、 $h(x)$ は $x=2$ のとき最小値 5 をとる。(1)より、

$$g(x) = f(x) + h(x)$$

であることと、 $f(x)$ 、 $h(x)$ がともに $x=2$ で最小値をとることから、 $g(x)$ は $x=2$ のとき最小値 7 をとる。

(答) 7

Ⅲ

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = x^2 - 2ax + a^2 \end{cases}$$

より、 y を消去すると

$$2x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0$$

となる。この2次方程式の解は2つの放物線の共有点の座標であるから、その解の個数は共有点の個数に等しい。この2次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (a+1)^2 - 2(a^2 - 1) \\ &= a^2 + 2a + 1 - 2a^2 + 2 \\ &= -a^2 + 2a + 3 \\ &= -(a-3)(a+1) \end{aligned}$$

である。したがって2次方程式の解の個数、すなわち2つの放物線の共有点の個数は

$$D < 0 \Leftrightarrow a < -1, 3 < a \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a = -1, 3 \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$D > 0 \Leftrightarrow -1 < a < 3 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a < -1, 3 < a \text{ のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

$$a = -1, 3 \text{ のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$-1 < a < 3 \text{ のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

IV

(1)

三角関数の加法定理より

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

である。ここで、

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。同様に

$$\cos \alpha + \cos \beta = m \quad \dots \textcircled{3}$$

の両辺を 2 乗すると

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta = m^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。よって、①' + ②' より

$$\begin{aligned} 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta &= m^2 + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} m^2 - \frac{7}{8} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} m^2 - \frac{7}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} m^2 - \frac{7}{8}$$

(2)

(1)の結果より、

$$-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2} m^2 - \frac{7}{8} \leq 1$$

$$\therefore -\frac{1}{4} \leq m^2 \leq \frac{15}{4}$$

となる。 m が実数であることから、 m は常に $m^2 \leq \frac{15}{4}$ ，すなわち $-\frac{\sqrt{15}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{15}}{2}$ を満た

す。ここで $m = \frac{\sqrt{15}}{2}$ ，すなわち $\cos(\alpha - \beta) = 1$ を満たす α, β を考えると

$$\alpha - \beta = 2n\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

より

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = \cos \beta \end{cases}$$

である。これらの 2 式と①、③式より

$$\begin{cases} \sin \alpha = \sin \beta = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

となる。このとき m は最大値 $\frac{\sqrt{15}}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{15}}{2}$$