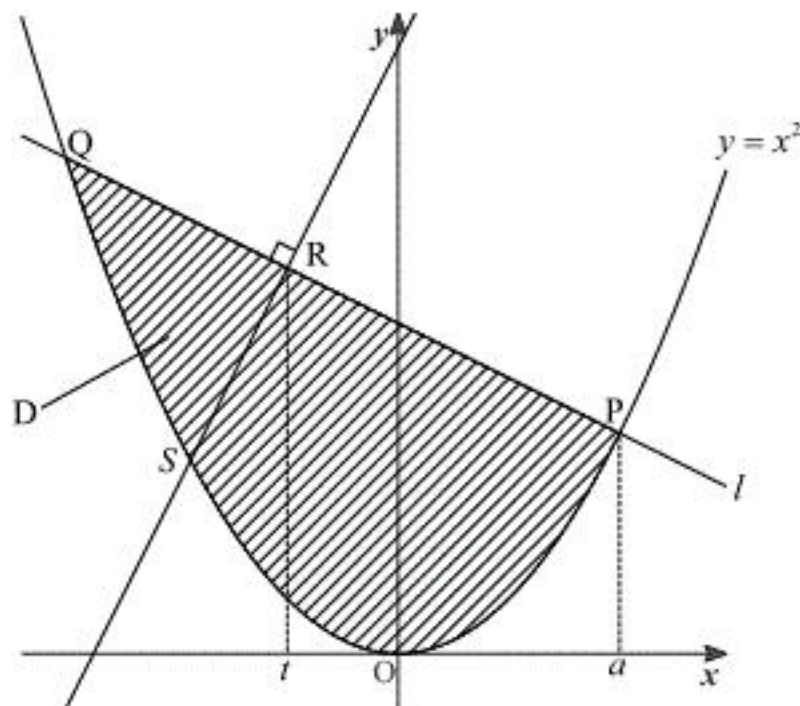


【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
c	d	n	g	i	e	a

【解説】



$y=x^2$ の両辺を x で微分すると $y'=2x$ であるから、点 (a, a^2) における C の接線の傾きは $2a$

である。これと $a>0$ より法線 l の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であるので、その方程式は

$$y=-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$$

である。 C と l の方程式から y を消去して連立すると

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2a}(x-a)+a^2 \\ \Leftrightarrow (x-a)(x+a)+\frac{1}{2a}(x-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x=a, -\frac{2a^2+1}{2a} \end{aligned}$$

であるから、 Q の座標は $\left(-\frac{2a^2+1}{2a}, \left(-\frac{2a^2+1}{2a}\right)^2\right)$ である。 R を通り l に垂直な直線と C の交

点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 &= 2a(x-t)-\frac{1}{2a}(t-a)+a^2 \\ \Leftrightarrow x^2-2ax-a^2+2at+\frac{1}{2a}(t-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= a \pm \sqrt{a^2+a^2-2at-\frac{1}{2a}(t-a)} \\ \Leftrightarrow x &= a \pm \sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}} \cdot \sqrt{a-t} \end{aligned}$$

である。ここで S は D に含まれるから、その x 座標は $-\frac{2a^2+1}{2a} \leq x \leq a$ をみたす。したがっ

て S の x 座標は $a-\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}} \cdot \sqrt{a-t}$ である。いま、直線 RS の傾きは $2a$ であり、2点 R, S の x

座標の差は $t-a+\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}} \cdot \sqrt{a-t}(>0)$ であるから、線分 RS の長さ $g(t)$ は

$$\begin{aligned} g(t) &= \sqrt{(2a)^2+1} \cdot \left(t-a+\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}} \cdot \sqrt{a-t}\right) \\ &= \sqrt{4a^2+1} \cdot \left(t-a+\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}} \cdot \sqrt{a-t}\right) \end{aligned}$$

である。さらに、直線 QR の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であり、2点 Q, R の x 座標の差は $t-\left(-\frac{2a^2+1}{2a}\right)$ であ

るから、線分 QR の長さ $h(t)$ は

$$\begin{aligned} h(t) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2a}\right)^2+1^2} \cdot \left\{t-\left(-\frac{2a^2+1}{2a}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \cdot \left\{t-\left(-\frac{2a^2+1}{2a}\right)\right\} \end{aligned}$$

である。以上から、求める回転体の体積 $V(a)$ は

$$V(a) = \pi \int_0^{h(a)} r^2 ds$$

と表せる。ここで、 $s=h(t)$ と置換すると $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a}$ であり

s	0	$\rightarrow$	$h(a)$
t	$-\frac{2a^2+1}{2a}$	$\rightarrow$	a

であるから、

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_{-\frac{2a^2+1}{2a}}^a \left\{g(t)\right\}^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} dt \quad (\because r=g(t)) \\ &= \pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \int_{-\frac{2a^2+1}{2a}}^a (a-t) \left(-\sqrt{a-t}+\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^2 dt \end{aligned}$$

である。また $u=\sqrt{a-t}$ と置換すると

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{a-t}} = -\frac{1}{2u}$$

であり

t	$-\frac{2a^2+1}{2a}$	$\rightarrow$	a
u	$\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}$	$\rightarrow$	0

であるから、

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \int_{\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}}^0 u^2 \left(-u+\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^2 \cdot (-2u) du \\ &= 2\pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \int_0^{\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}} u^3 \left(u-\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^2 du \\ &= 2\pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \int_0^{\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}} \left\{u^5-2\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}u^4+\left(\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^2u^3\right\} du \\ &= 2\pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \left[\frac{u^6}{6} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}u^5 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^2u^4 \right]_0^{\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}} \\ &= 2\pi \left(\sqrt{4a^2+1}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a} \cdot \left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right) \left(\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}\right)^6 \\ &= \frac{(4a^2+1)^{\frac{9}{2}}}{480a^4} \pi \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} V'(a) &= \frac{\pi}{480} \cdot \frac{8a \cdot \frac{9}{2} (4a^2+1)^{\frac{7}{2}} \cdot a^4 - (4a^2+1)^{\frac{9}{2}} \cdot 4a^3}{a^8} \\ &= \frac{\pi}{120} \cdot \frac{(4a^2+1)^{\frac{7}{2}} (5a^2-1)}{a^5} \\ &= \frac{\pi}{120} \cdot \frac{(4a^2+1)^{\frac{7}{2}} (\sqrt{5a-1})(\sqrt{5a+1})}{a^5} \end{aligned}$$

となるから、増減表をかくと以下ようになる。

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	...
$V'(a)$	/	-	0	+
$V(a)$	/	$\searrow$	$V\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\nearrow$

以上から、 $V(a)$ は $a=\frac{1}{\sqrt{5}}$ で最小値をとる。

〔解答〕

ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
d	c	b	c	c	d	j	c	j	k

〔解説〕

コインを3回投げて終了するのは、コインを3回投げて表→裏→表あるいは裏→表→裏となるときてあり、その確率 p_3 は

$$\begin{aligned} p_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 - p_3 - r_3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。コインを4回投げて終了するのは、コインを3回投げて「まだ終了していないが4回目に表が出れば終了する」という状態になり、4回目に表が出るときか、コインを3回投げて「まだ終了していないが4回目に裏が出れば終了する」という状態になり、4回目に裏が出るときであり、その確率 p_4 は

$$\begin{aligned} p_4 &= r_3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} s_4 &= 1 - p_3 - p_4 - r_4 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

である。コインを n 回投げて「まだ終了していないが $n+1$ 回目に表が出れば終了する」という状態では、 $n-1, n$ 回目に表→裏の順に出ている。コインを n 回投げて「まだ終了していないが $n+1$ 回目に裏が出れば終了する」という状態では、 $n-1, n$ 回目に裏→表の順に出ている。コインを n 回投げて「まだ終了しておらず、 $n+1$ 回目に表が出ても裏が出ても終了しない」という状態では、 $n-1, n$ 回目に表→表または裏→裏の順に出ている。以上から

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= s_n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} s_n \\ s_{n+1} &= r_n \cdot \frac{1}{2} + s_n \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} r_n + \frac{1}{2} s_n \end{aligned}$$

が成立する。以上の2式から $s_{n+2} = \frac{1}{2} s_{n+1} + \frac{1}{4} s_n$ が成立し、

$$\begin{aligned} t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} \right) \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases} s_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \left(s_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_n \right) & \dots \textcircled{1} \\ s_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \left(s_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_n \right) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する。したがって $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)$ である。①から

$$\begin{aligned} s_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_{n+1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} \cdot \left(s_4 - \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_3 \right) \\ &= \frac{2+\sqrt{5}}{8} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} \end{aligned}$$

であり、 $\frac{2+\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^3$ から

$$s_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n+1}$$

である。②についても同様に解くと

$$\begin{aligned} s_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_{n+1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} \left(s_4 - \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_3 \right) \\ &= \frac{2-\sqrt{5}}{8} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \left(\because \frac{2-\sqrt{5}}{8} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

である。以上から

$$\begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} s_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4} s_{n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} \end{cases}$$

であり、これらを辺々引いて

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2} s_{n+2} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n+2} \\ \Leftrightarrow s_n &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n \right\} \quad (n \geq 3) \end{aligned}$$

を得る。 $p_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$, $r_n = \frac{1}{2} s_{n-1}$ から

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^{n-2} \right\} \quad (n \geq 3)$$

である。

Ⅲ

(1)

以下、合同式の法を3とする。このとき

$$\begin{aligned} a &\equiv r \\ \Rightarrow a^3 &\equiv r^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv r^3 + 4 \end{aligned}$$

である。

(ア) $r=0$ のとき

$$\begin{aligned} a^3 + 4 &\equiv r^3 + 4 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 4 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 1 \end{aligned}$$

であるから、 $a^3 + 4$ を3で割った余りは1である。

(イ) $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} a^3 + 4 &\equiv r^3 + 4 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 5 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 2 \end{aligned}$$

であるから、 $a^3 + 4$ を3で割った余りは2である。

(ウ) $r=2$ のとき

$$\begin{aligned} a^3 + 4 &\equiv r^3 + 4 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 12 \\ \Leftrightarrow a^3 + 4 &\equiv 0 \end{aligned}$$

であるから、 $a^3 + 4$ を3で割った余りは0である。

(答) (ア): 1, (イ): 2, (ウ): 0

(2)

以下、合同式の法を3とする。

$$\begin{aligned} a &\equiv r \\ \Rightarrow a^5 &\equiv r^5 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv r^5 + 8 \end{aligned}$$

となる。

[1] $r=0$ のとき

$$\begin{aligned} a^5 + 8 &\equiv r^5 + 8 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 8 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 2 \end{aligned}$$

であるから、 $a^5 + 8$ を3で割った余りは2である。

[2] $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} a^5 + 8 &\equiv r^5 + 8 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 9 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 0 \end{aligned}$$

であるから、 $a^5 + 8$ を3で割った余りは0である。

[3] $r=2$ のとき

$$\begin{aligned} a^5 + 8 &\equiv r^5 + 8 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 40 \\ \Leftrightarrow a^5 + 8 &\equiv 1 \end{aligned}$$

であるから、 $a^5 + 8$ を3で割った余りは1である。

以上[1], [2], [3]と(1)の結果より、 $a, a^3 + 4, a^5 + 8$ を3で割った余りは下表のようになる。

r	0	1	2
a	0	1	2
$a^3 + 4$	1	2	0
$a^5 + 8$	2	0	1

以上から、 $a, a^3 + 4, a^5 + 8$ のいずれかは3の倍数となることが示された。

(証明終)

(3)

(2)から、 $a, a^3 + 4, a^5 + 8$ のいずれかが3の倍数となるため、 $a, a^3 + 4, a^5 + 8$ のすべてが素数となるとき、これらのうち1つは3となる。ここで

$$\begin{aligned} a^3 + 4 &= 3 \\ \Leftrightarrow a^3 &= -1 \\ a^5 + 8 &= 3 \\ \Leftrightarrow a^3 &= -5 \end{aligned}$$

であるが、 a は自然数より上の2つの方程式に解はない。これより少なくとも $a=3$ が必要である。 $a=3$ のとき、 $a^3 + 4=31, a^5 + 8=251$ となり、これらはいずれも素数である。よって、3つの自然数 $a, a^3 + 4, a^5 + 8$ が同時に素数となる a は3である。

(答) $a=3$

IV

(1)

$f_n(x) = x^{-1+\frac{1}{n}}$ について,

$$\begin{aligned}\int f_n(x) dx &= \int x^{-1+\frac{1}{n}} dx \\ &= nx^{\frac{1}{n}} + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int f_n(x) dx = nx^{\frac{1}{n}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}\int_1^{a_n} f_n(x) dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \left[nx^{\frac{1}{n}} \right]_1^{a_n} &= 1 \\ \Leftrightarrow n \left(a_n^{\frac{1}{n}} - 1 \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n\end{aligned}$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}\int_1^{b_n} f_{n+1}(x) dx &= -1 \\ \Leftrightarrow \left[(n+1)x^{\frac{1}{n+1}} \right]_1^{b_n} &= -1 \\ \Leftrightarrow (n+1) \left(b_n^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right) &= -1 \\ \Leftrightarrow b_n &= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}\end{aligned}$$

である。これを用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left\{ 1 + \left(-\frac{1}{n+1} \right) \right\}^{-(n+1)} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

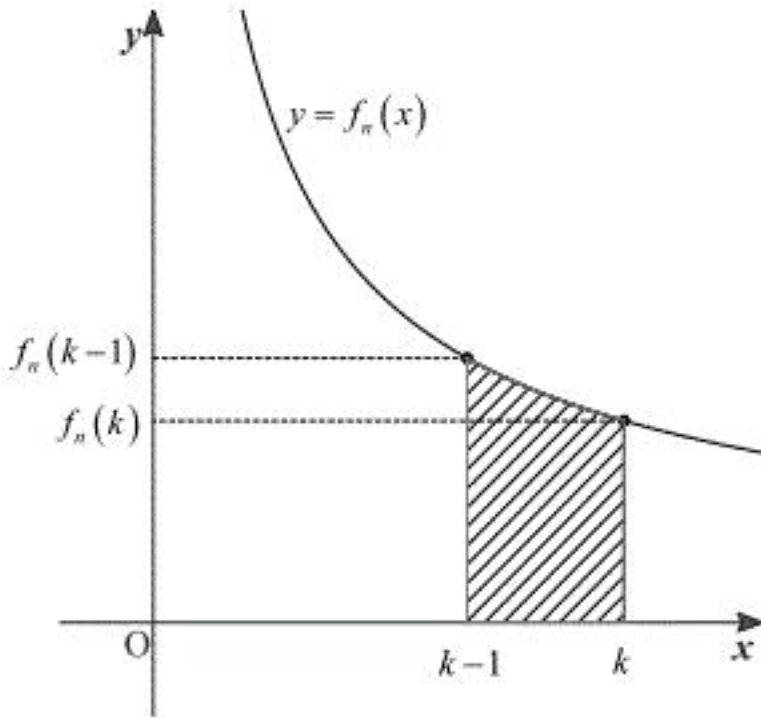
である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e, \quad b_n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{e}$$

(3)

$x > 0, \frac{1}{n} \leq 1$ より $f'_n(x) = \left(-1 + \frac{1}{n} \right) x^{-2+\frac{1}{n}} \leq 0$ なので, $y = f_n(x)$ は単調減少する。またすべて

の実数 x に対して $x^{-1+\frac{1}{n}} > 0$ であるから $y = f_n(x)$ のグラフをかくと以下のようになる。



$\int_{k-1}^k f_n(x) dx$ は上図の斜線部の面積を表す。したがって

$$\int_{k-1}^k f_n(x) dx \geq f_n(k) \cdot \{k - (k-1)\} = k^{-1+\frac{1}{n}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。ここで, 2 以上の整数 k に対して $y = k^x$ は単調増加であるから

$$k^{-1+\frac{1}{n}} > k^{-1} = \frac{1}{k} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。以上①, ②から

$$\int_{k-1}^k f_n(x) dx > \frac{1}{k}$$

が成立する。これを用いて

$$\begin{aligned}\int_1^2 f_n(x) dx + \int_2^3 f_n(x) dx + \int_3^4 f_n(x) dx &> \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \int_1^4 f_n(x) dx &> \frac{13}{12}\end{aligned}$$

となる。ここで $\int_1^{a_n} f_n(x) dx = 1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^4 f_n(x) dx &> \frac{13}{12} > 1 = \int_1^{a_n} f_n(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_1^4 f_n(x) dx &> \int_1^{a_n} f_n(x) dx\end{aligned}$$

であり, $x > 1$ において $f_n(x) = x^{-1+\frac{1}{n}} > 0$ であるから, $a_n < 4$ が示された。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{-1+\frac{1}{n+1}} - x^{-1+\frac{1}{n}} \\ &= x^{-1+\frac{1}{n+1}} \left(1 - x^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} \right) \\ &= x^{-1+\frac{1}{n+1}} \left(1 - x^{\frac{1}{n(n+1)}} \right)\end{aligned}$$

であり, $x > 1$ において $x^{\frac{1}{n(n+1)}} > 1$ から, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ である。これより

$$\begin{aligned}\int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx &< \int_1^{a_n} f_n(x) dx = 1 \\ \Leftrightarrow \int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx &< 1\end{aligned}$$

が成立する。ここで $\int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x) dx = 1$ から

$$\begin{aligned}\int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx &< 1 = \int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x) dx \\ \Leftrightarrow \int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx &< \int_1^{a_{n+1}} f_{n+1}(x) dx\end{aligned}$$

であり, $x > 1$ において $f_{n+1}(x) = x^{-1+\frac{1}{n+1}} > 0$ であるから, $a_n < a_{n+1}$ が示された。

(証明終)