

1

(1)

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \cdots \textcircled{1}$$

がすべての自然数  $n$  で成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり左辺と右辺の値が等しいから等式①が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき等式①が成り立つ、すなわち

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つと仮定する。すると  $n=k+1$  のとき、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{1}{6}(k+1)(k+1+1)\{2(k+1)+1\} \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

となり、左辺と右辺の値が等しいから等式①が成り立つ。

[1], [2]より数学的帰納法からすべての自然数  $n$  で等式  $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

求める和は  $\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$  と表されるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{6}n(n-1)\{(2n-1)+3\} \\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

(3)

$1, 2, \cdots, n-1, n$  ( $n$  は 3 以上の整数)の中で異なる 2 つの数の積の和は、

$$\begin{aligned} &(1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot n) + (2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot n) + \cdots + (n-1)n \\ &= \frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 - \sum_{k=1}^n k^2\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2) \end{aligned}$$

と求まる。ここから隣接する異なる 2 つの数の積の和を除いて、求める数の和は

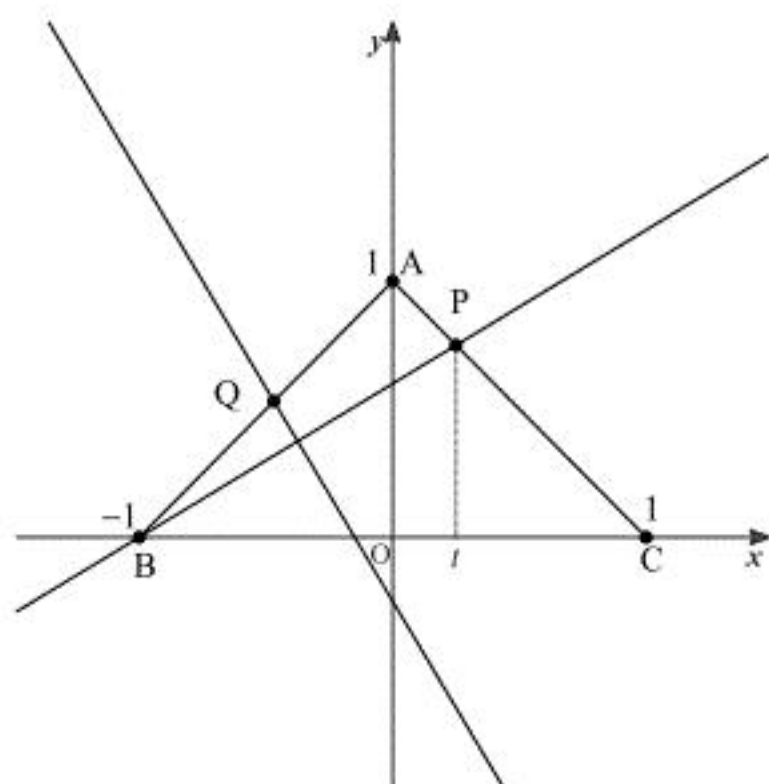
$$\begin{aligned} &\frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2) - \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) \\ &= \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)\{(3n+2)-8\} \\ &= \frac{1}{8}n(n-2)(n-1)(n+1) \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{8}n(n-2)(n-1)(n+1)$$

## II

(1)



点Pは線分AC上の点であるから、 $y = -x + 1$ 上の点であり、座標は $P(t, -t+1)$  ( $0 < t < 1$ ) となる。よって2点B, Pの中点の座標は $\left(\frac{t-1}{2}, \frac{-t+1}{2}\right)$ であり、直線BPの傾きは

$$\frac{-t+1-0}{t-(-1)} = \frac{-t+1}{t+1}$$

であるから、線分BPの垂直二等分線の方程式は

$$y = -\frac{t+1}{-t+1} \left( x - \frac{t-1}{2} \right) + \frac{-t+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{t+1}{t-1} x - t$$

となる。次にこの直線と直線ABの交点Qの座標を求める。直線ABの方程式は $y = x + 1$ であるから、点Qのx座標は

$$x + 1 = \frac{t+1}{t-1} x - t$$

$$\therefore x = \frac{(t+1)(t-1)}{2}$$

となる。したがって点Qの座標は $Q\left(\frac{(t+1)(t-1)}{2}, \frac{t^2+1}{2}\right)$ と求まる。

(答) 線分BPの垂直二等分線： $y = \frac{t+1}{t-1} x - t$ ,  $Q\left(\frac{(t+1)(t-1)}{2}, \frac{t^2+1}{2}\right)$

(2)

(1)より $\overrightarrow{AP} = (t, -t)$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{t^2-1}{2}, \frac{t^2-1}{2}\right)$ であるから、 $\triangle AQP$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} \left| t \left( \frac{t^2-1}{2} \right) - (-t) \left( \frac{t^2-1}{2} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2} t (1-t^2) \quad (\because 0 < t < 1)$$

と表せる。

(答)  $S = \frac{1}{2} t (1-t^2)$

(3)

$f(t) = \frac{1}{2} t (1-t^2)$  ( $0 < t < 1$ ) とする。

$$f'(t) = \frac{-3t^2+1}{2}$$

$$= -\frac{3}{2} \left( t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left( t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

となるから、 $f(t)$ の $0 < t < 1$ における増減表は下表のようになる。

|         |   |     |                                    |     |   |
|---------|---|-----|------------------------------------|-----|---|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{1}{\sqrt{3}}$               | ... | 1 |
| $f'(t)$ |   | +   | 0                                  | -   |   |
| $f(t)$  |   |     | $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ |     |   |

上表より $f(t)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大かつ最大となり、その値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

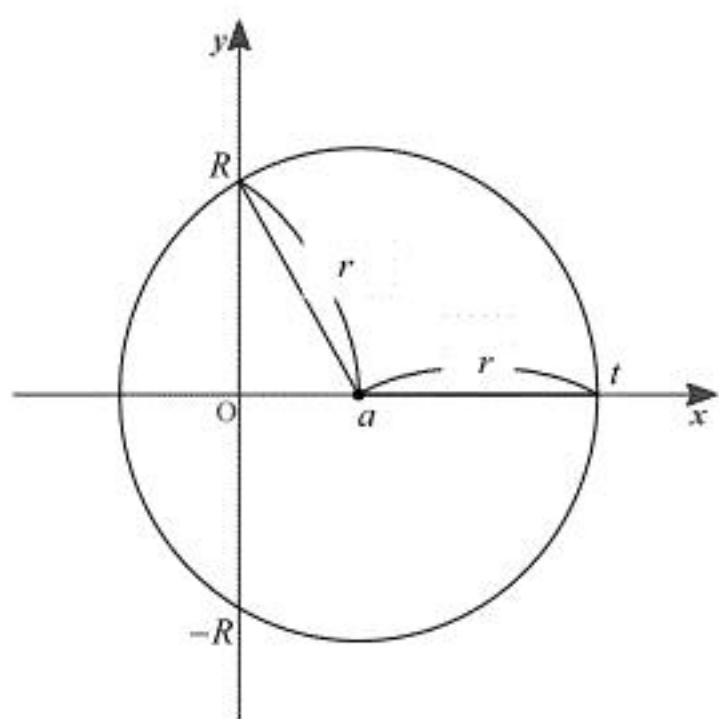
$$= \frac{\sqrt{3}}{9}$$

である。したがって $S$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最大値 $\frac{\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{\sqrt{3}}{9} \left( t = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$

### Ⅲ

(1)



2点 $(0, R)$ ,  $(0, -R)$ を結ぶ線分の垂直二等分線は $x$ 軸であるから, 中心は $x$ 軸上に存在し, その座標は $(a, 0)$ である。したがって, 円周上の各点と中心の距離が等しいことから

$$\begin{aligned}\sqrt{(0-a)^2 + (R-0)^2} &= t-a \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + R^2} &= t-a \\ \Leftrightarrow a^2 + R^2 &= t^2 - 2ta + a^2 \\ \Leftrightarrow 2ta &= t^2 - R^2 \\ \therefore a &= \frac{t^2 - R^2}{2t}\end{aligned}$$

と表せる。また

$$\begin{aligned}r &= t-a \\ &= t - \frac{t^2 - R^2}{2t} \\ &= \frac{t^2 + R^2}{2t}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{t^2 + R^2}{2t}, \quad a = \frac{t^2 - R^2}{2t}$$

(2)

(1)より円 $C$ の方程式は

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 &= r^2 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2\end{aligned}$$

となる。よって円 $C$ 上の点 $(x, y)$  ( $y \geq 0$ )について

$$\begin{aligned}y^2 &= \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2 - \left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= -\left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -\left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2$$

(3)

$f(x) = -\left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2$ であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^t f(x) dx &= \int_0^t \left\{ -\left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^2 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2 \right\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \left(x - \frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^3 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2 x \right]_0^t \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^3 + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2 t - \left\{ -\frac{1}{3} \left(-\frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^3 \right\} \\ &= -\frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^3 + \left(\frac{t^2 - R^2}{2t}\right)^3 \right\} + \left(\frac{t^2 + R^2}{2t}\right)^2 t \\ &= -\frac{2t^6 + 6t^2 R^4}{24t^3} + \frac{t^4 + 2t^2 R^2 + R^4}{4t} \\ &= \frac{-t^4 - 3R^4 + 3t^4 + 6t^2 R^2 + 3R^4}{12t} \\ &= \frac{t^3 + 3tR^2}{6}\end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^t f(x) dx = \frac{t^3 + 3tR^2}{6}$$