

【解答】

(1)	$a=3, b=-\frac{13}{4}$
(2)	27 桁
(3)	$x=\frac{\pi}{6}$
(4)	$\left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$
(5)	$a_n=3^{n-1}-2$
(6)	$f(x)=x^2-\frac{1}{3}$

【解説】

(1)

与えられた 2 次方程式の係数はすべて実数であるから、1 つの解が $x=\frac{3}{2}-i$ であるとき、その

共役な複素数である $x=\frac{3}{2}+i$ がもう 1 つの解となる。2 次の係数は -1 であるから、与えられ

た 2 次方程式は

$$\begin{aligned} &-\left\{x-\left(\frac{3}{2}-i\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{3}{2}+i\right)\right\}=0 \\ \Leftrightarrow &-x^2+3x-\frac{13}{4}=0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a=3, b=-\frac{13}{4}$ である。

(2)

12^{25} の桁数を n (ただし、 n は自然数) とおくと

$$10^{n-1} \leq 12^{25} < 10^n$$

が成り立つ。このとき、各辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} n-1 &\leq 25 \log_{10} 12 < n \\ \Leftrightarrow 25 \log_{10} 12 < n &\leq 25 \log_{10} 12 + 1 \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2=0.3010, \log_{10} 3=0.4771$ より

$$\begin{aligned} \log_{10} 12 &= \log_{10} 2^2 \cdot 3 \\ &= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 2 \cdot 0.3010 + 0.4771 \\ &= 1.0791 \end{aligned}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は

$$26.9775 < n \leq 27.9775$$

となる。よって、 n は自然数より $n=27$ であるから、 12^{25} は 27 桁の整数である。

(3)

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より、 $y = \sin x + \cos^2 x$ を変形すると

$$\begin{aligned} y &= \sin x + (1 - \sin^2 x) \\ &= -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから、 y は

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

のとき最大値をとる。

(4)

求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x, y, z)$ とおくと、 $|\vec{e}|^2 = 1$ より、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\vec{e}$ は 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であるから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 0 \\ -4x + 5y - 3z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 0 \\ 3y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y = 0 \\ z = -\frac{4}{3}x \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これらを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + 0 + \frac{16}{9}x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{9}{25} \\ \therefore x &= \pm \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、これと $y=0, z=-\frac{4}{3}x$ より、

$$\vec{e} = \left(\pm \frac{3}{5}, 0, \mp \frac{4}{5}\right) \quad (\text{複号同順})$$

である。

(5)

$a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^{n-1}$ であるから、両辺を 3^{n+1} で割って、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{9}$$

となる。ここで、 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3}\left(b_n - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

となり、 $a_1 = -1$ より

$$\begin{aligned} b_1 - \frac{1}{3} &= \frac{a_1}{3} - \frac{1}{3} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\left\{b_n - \frac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} b_n - \frac{1}{3} &= -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n \cdot b_n \\ &= 3^{n-1} - 2 \end{aligned}$$

である。

(6)

定数 a を $a = \int_0^1 f(t) dt$ とおくと、 $f'(x) = 2x + a$ より、 $f(x)$ は積分定数 C を用いて、

$$f(x) = x^2 + ax + C$$

と表すことができる。ここで、 $f(0) = -\frac{1}{3}$ より、 $C = -\frac{1}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f(t) dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 + at - \frac{1}{3}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 - \frac{1}{3}t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となり、 $a=0$ である。以上より、 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}$ である。

II

(1)

Pが動いた距離を k とする。Pは表が出たときに2だけ進み、裏が出たときに1だけ進むので、硬貨を5回続けて投げたとき、

$$5 \leq k \leq 10$$

であり、PがAにいるとき、 k は4の倍数であるから、

$$k=8$$

となる。このとき、硬貨の表の出た回数を x 回とすると、裏の出た回数は $(5-x)$ 回であるから、

$$2x + (5-x) = 8$$

$$\therefore x=3$$

となる。したがって、各回の試行は独立であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} {}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{10}{32} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{5}{16}$

(2)

(1)と同様に考えると、硬貨を10回続けて投げたとき、

$$10 \leq k \leq 20$$

であり、また、PがDにいるとき、 k は4で割って3余る自然数であるから、

$$k=11, 15, 19$$

となる。このとき、硬貨の表の出た回数を x 回とすると、裏の出た回数は $(10-x)$ 回であるから、

$$2x + (10-x) = 11, 15, 19$$

$$\therefore x=1, 5, 9$$

となる。したがって、各回の試行は独立であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} {}_{10}C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + {}_{10}C_5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_{10}C_9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} &= \frac{10 + 252 + 10}{2^{10}} \\ &= \frac{272}{1024} \\ &= \frac{17}{64} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{17}{64}$

Ⅲ

(1)

円 C_1, C_2 の方程式を整理すると,

$$C_1: x^2 + y^2 = r$$

$$C_2: (x-5)^2 + y^2 = 4$$

となり, r は正の定数より, 円 C_1 は原点を中心とした半径が $\sqrt{r}$ の円で, 円 C_2 は点 $(5, 0)$ を中心とした半径が 2 の円である。よって, 円 C_1 と円 C_2 が接するとき,

$$|r \pm 2| = 5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{r} = 3, 7$$

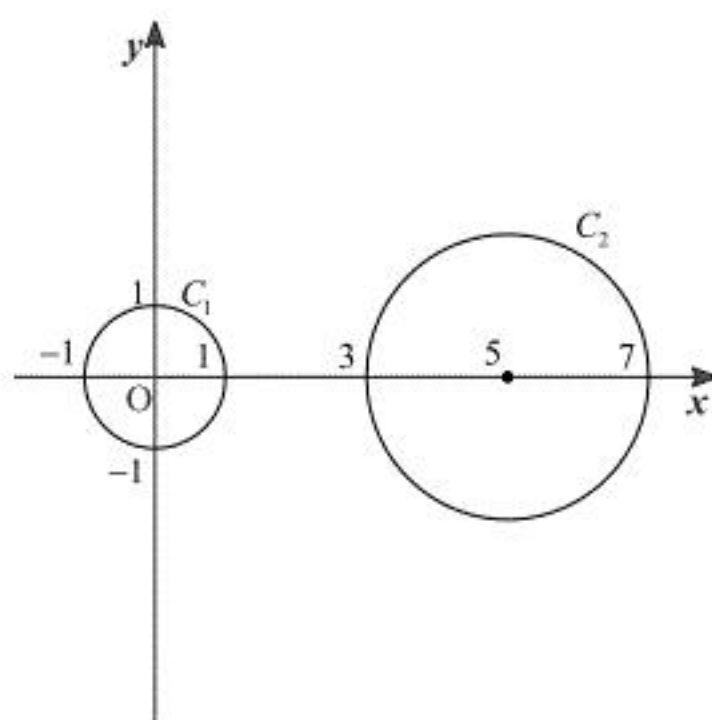
$$\therefore r = 9, 49$$

である。

(答) $r = 9, 49$

(2)

$r=1$ のとき, 円 C_1 と円 C_2 のグラフを図示すると, 以下のようになる。



前図より円 C_1, C_2 の共通接線 ℓ は y 軸に平行な直線ではないので,

$$\ell: y = ax + b \quad (a, b \text{ は実数})$$

とおける。ここで, 接線と円の中心間距離は円の半径に等しく, ℓ と原点, ℓ と点 $(5, 0)$ との距離はそれぞれ 1, 2 である。したがって, 点と直線の距離の公式より

$$\begin{cases} \frac{|b|}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \\ \frac{|5a+b|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 + 1 \\ (5a+b)^2 = 4(a^2+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 + 1 \\ (5a+b)^2 = 4b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 + 1 \\ 25a^2 + 10ab - 3b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = a^2 + 1 \\ (5a+3b)(5a-b) = 0 \end{cases}$$

となる。よって, $b = -\frac{5}{3}a, 5a$ であるから, 以下, 場合分けをして考える。

[1] $b = -\frac{5}{3}a$ のとき

$b = -\frac{5}{3}a$ を $b^2 = a^2 + 1$ に代入すると

$$\frac{25}{9}a^2 = a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{16}$$

となるから,

$$(a, b) = \left(\pm \frac{3}{4}, \mp \frac{5}{4} \right) \quad (\text{複号同順})$$

である。

[2] $b = 5a$ のとき

$b = 5a$ を $b^2 = a^2 + 1$ に代入すると

$$25a^2 = a^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{24}$$

となるから,

$$(a, b) = \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{12}, \pm \frac{5\sqrt{6}}{12} \right) \quad (\text{複号同順})$$

である。

以上, [1], [2] より ℓ の方程式は

$$y = \pm \frac{3}{4}x \mp \frac{5}{4}, y = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}x \pm \frac{5\sqrt{6}}{12} \quad (\text{複号同順})$$

である。

(答) $y = \pm \frac{3}{4}x \mp \frac{5}{4}, y = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}x \pm \frac{5\sqrt{6}}{12} \quad (\text{複号同順})$