

2021 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類があります。
2. 解答は、必ず解答欄に記入およびマークしてください。解答欄以外への記入およびマークは無効となります。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、マーク解答用紙には鉛筆のあとや消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、切り離したり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入およびマークしてください。未記入や記入ミスがあった場合は、当該科目は無効になります。
6. マーク解答用紙への受験番号の記入およびマークは、コンピュータ処理上非常に重要なので、誤記のないようにしてください。
7. 一度記入したマークを修正する場合、しっかりと消してください。消し残しがあると、マーク読み取り装置が反応して解答が無効となることがあります。
8. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20 点)

放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ ($a > 0$) における法線 ℓ の方程式を $y = f(x)$ とおくと、 $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ となる。また C と ℓ の交点のうち P と異なる方の点 Q を求めると、 $Q\left(\boxed{\text{イ}}, \left(\boxed{\text{イ}}\right)^2\right)$ となる。

以下、 C と ℓ で囲まれた部分を D とし、 D を ℓ のまわりに1回転して得られる回転体の体積 $V(a)$ を求める。 D に含まれる ℓ 上の点を $R(t, f(t))$ ($\boxed{\text{イ}} \leq t \leq a$) とおく。 R を通り ℓ に垂直な直線は $y = 2a(x-t) + f(t)$ で与えられる。この直線と $y = x^2$ の2つの交点のうち D に含まれる方の点 S の x 座標は $x = a - \boxed{\text{ウ}}\sqrt{a-t}$ となる。このとき線分 RS の長さ $r = g(t)$ は $g(t) = \boxed{\text{エ}}\left(t - a + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{a-t}\right)$ となる。線分 QR の長さ $s = h(t)$ は $h(t) = \boxed{\text{オ}}\left(t - \boxed{\text{イ}}\right)$ で与えられるので、

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_0^{h(a)} r^2 ds = \pi \int_{\boxed{\text{イ}}}^a \{g(t)\}^2 h'(t) dt \\ &= \pi \left\{ \left(\boxed{\text{エ}}\right)^2 \times \boxed{\text{オ}} \right\} \int_{\boxed{\text{イ}}}^a (a-t) \left(-\sqrt{a-t} + \boxed{\text{ウ}}\right)^2 dt \end{aligned}$$

となる。ここで $u = \sqrt{a-t}$ において置換積分を行えば

$$V(a) = 2\pi \left\{ \left(\boxed{\text{エ}}\right)^2 \times \boxed{\text{オ}} \right\} \int_0^{\boxed{\text{ウ}}} \left\{ u^5 - 2\boxed{\text{ウ}}u^4 + \left(\boxed{\text{ウ}}\right)^2 u^3 \right\} du = \boxed{\text{カ}}$$

が求まる。

さらに、 $a > 0$ の範囲で a を動かすとき、

$$\lim_{a \rightarrow +0} V(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \infty$$

であり、 $V(a)$ を最小にする a の値は $a = \boxed{\text{キ}}$ である。

問題Ⅰのアの解答群

- (a) $-\frac{2}{a}(x-a)+a^2$ (b) $-\frac{1}{a}(x-a)+a^2$
 (c) $-\frac{1}{2a}(x-a)+a^2$ (d) $-2a(x-a)+a^2$

問題Ⅰのイ、ウ、エ、オの解答群

- (a) $-\frac{a^2-1}{a}$ (b) $-\frac{2a^2-1}{2a}$ (c) $-\frac{a^2+1}{a}$ (d) $-\frac{2a^2+1}{2a}$
 (e) $\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$ (f) $\sqrt{a^2+1}$ (g) $\sqrt{4a^2+1}$ (h) $2a$
 (i) $\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2a}$ (j) $\frac{\sqrt{a^2+4}}{a}$ (k) $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ (l) $\frac{\sqrt{a^2+1}}{2a}$
 (m) $\sqrt{\frac{2a^2+1}{2a}}$ (n) $\sqrt{\frac{4a^2+1}{2a}}$ (o) $\sqrt{\frac{2a^2+1}{a}}$ (p) $\sqrt{\frac{4a^2+1}{a}}$

問題Ⅰのカの解答群

- (a) $\frac{(2a^2+1)^3(a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{60a^4}\pi$ (b) $\frac{(2a^2+1)^{\frac{9}{2}}}{120a^4}\pi$ (c) $\frac{(2a^2+1)^{\frac{9}{2}}}{60a^4}\pi$
 (d) $\frac{(2a^2+1)^3(4a^2+1)^{\frac{3}{2}}}{60a^4}\pi$ (e) $\frac{(4a^2+1)^{\frac{9}{2}}}{480a^4}\pi$ (f) $\frac{(4a^2+1)^{\frac{9}{2}}}{60a^4}\pi$
 (g) $\frac{(a^2+1)^2(4a^2+1)^2}{120a^{\frac{7}{2}}}\pi$ (h) $\frac{(4a^2+1)^4}{480\sqrt{2}a^{\frac{7}{2}}}\pi$ (i) $\frac{(4a^2+1)^4}{120\sqrt{2}a^{\frac{7}{2}}}\pi$

問題Ⅰのキの解答群

- (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\sqrt{2}$ (e) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (f) 4

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解
用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

コインを繰り返し投げ、連続した3回が順に、表→裏→表、あるいは、裏→表→裏、
というパターンが出たときにコイン投げを終了する。 $n \geq 3$ に対し、コインをちよう
ど n 回投げて終了する確率を p_n とする。以下の手順により p_n を求める。

コインを n 回投げて「まだ終了していないが $n+1$ 回目に表が出たら終了する」
または「まだ終了していないが $n+1$ 回目に裏が出たら終了する」という状態にあ
る確率を r_n とする。また、コインを n 回投げて「まだ終了しておらず、 $n+1$ 回目
に表が出ても裏が出ても終了しない」という状態にある確率を s_n とする。このとき、
 $r_3 = \frac{1}{4}$, $s_3 = \boxed{\text{ク}}$, $r_4 = \frac{1}{4}$, $s_4 = \boxed{\text{ケ}}$ である。ここで r_{n+1} と s_{n+1} を r_n, s_n
を用いて表すと、それぞれ

$$r_{n+1} = \boxed{\text{コ}}, \quad s_{n+1} = \boxed{\text{サ}}$$

となる。これらにより s_n の3項間の漸化式が得られる。

この3項間の漸化式は、 $\alpha < \beta$ として

$$s_{n+2} - \alpha s_{n+1} = \beta(s_{n+1} - \alpha s_n), \quad s_{n+2} - \beta s_{n+1} = \alpha(s_{n+1} - \beta s_n)$$

の形で表すことができる。この α, β はそれぞれ $\alpha = \boxed{\text{シ}}$, $\beta = \boxed{\text{ス}}$ である。
上の第1式を計算すると

$$s_{n+2} - \alpha s_{n+1} = \boxed{\text{セ}} \beta^{n-2} = \beta \boxed{\text{ソ}}$$

となる。第2式についても同様に計算し、これらを連立して解くと、 s_n の一般項が

$$s_n = \boxed{\text{タ}} (\beta^n - \alpha^n) \quad (n \geq 3)$$

となることがわかる。よって、 p_n の一般項は

$$p_n = \boxed{\text{チ}} (\beta^{n-2} - \alpha^{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

となる。

問題 II のク、ケの解答群

- Ⓐ $\frac{1}{8}$ Ⓑ $\frac{1}{4}$ Ⓒ $\frac{3}{8}$ Ⓓ $\frac{1}{2}$ Ⓔ $\frac{5}{8}$ Ⓕ $\frac{3}{4}$ Ⓖ $\frac{7}{8}$

問題 II のコ、サの解答群

- Ⓐ $\frac{1}{2}r_n$ Ⓑ $\frac{1}{2}s_n$ Ⓒ $\frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}s_n$ Ⓓ $\frac{1}{4}r_n + \frac{3}{4}s_n$ Ⓔ $\frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}s_n$

問題 II のシ、ス、セの解答群

- Ⓐ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Ⓑ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Ⓒ $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ Ⓓ $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$
Ⓔ $\frac{2-\sqrt{5}}{4}$ Ⓕ $\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ Ⓖ $\frac{1-2\sqrt{5}}{4}$ Ⓗ $\frac{1+2\sqrt{5}}{4}$
Ⓙ $\frac{2-\sqrt{5}}{8}$ Ⓚ $\frac{2+\sqrt{5}}{8}$ Ⓛ $\frac{1-2\sqrt{5}}{8}$ Ⓛ $\frac{1+2\sqrt{5}}{8}$
Ⓜ $\frac{4-\sqrt{5}}{8}$ Ⓝ $\frac{4+\sqrt{5}}{8}$ ⓐ $\frac{1-4\sqrt{5}}{8}$ ⓑ $\frac{1+4\sqrt{5}}{8}$

問題 II のソの解答群

- Ⓐ $n-1$ Ⓑ n Ⓒ $n+1$ Ⓓ $n+2$

問題 II のタ、チの解答群

- Ⓐ $\sqrt{5}$ Ⓑ $2\sqrt{5}$ Ⓒ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Ⓓ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
Ⓔ $1+\sqrt{5}$ Ⓕ $1+2\sqrt{5}$ Ⓖ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ Ⓗ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Ⓙ $\frac{2}{\sqrt{5}}$ Ⓚ $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ Ⓛ $\frac{1}{4\sqrt{5}}$

(設問は次のページにつづく)

III 自然数 a を 3 で割った余りを r ($r = 0, 1, 2$) とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 以下を求めよ。

(ア) $r = 0$ のとき, $a^3 + 4$ を 3 で割った余り。

(イ) $r = 1$ のとき, $a^3 + 4$ を 3 で割った余り。

(ウ) $r = 2$ のとき, $a^3 + 4$ を 3 で割った余り。

(2) 3 つの自然数 a , $a^3 + 4$, $a^5 + 8$ のうちいずれか 1 つは 3 の倍数であることを示せ。

(3) 3 つの自然数 a , $a^3 + 4$, $a^5 + 8$ が同時に素数となる a をすべて求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV 自然数 n に対し $f_n(x) = x^{-1+\frac{1}{n}}$ ($x > 0$) とおく。また、正の実数 a_n は $\int_1^{a_n} f_n(x) dx = 1$ を満たすものとする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 関数 $f_n(x)$ の不定積分を求めよ。

(2) a_n の値と極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。また、正の実数 b_n が $\int_1^{b_n} f_{n+1}(x) dx = -1$ を満たすとき、 b_n の値と極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

(3) 2 以上の自然数 k に対して $\int_{k-1}^k f_n(x) dx > \frac{1}{k}$ を示し、これを利用して $a_n < 4$ を証明せよ。

(4) $\int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx < 1$ を示し、これを利用して $a_n < a_{n+1}$ を証明せよ。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

