

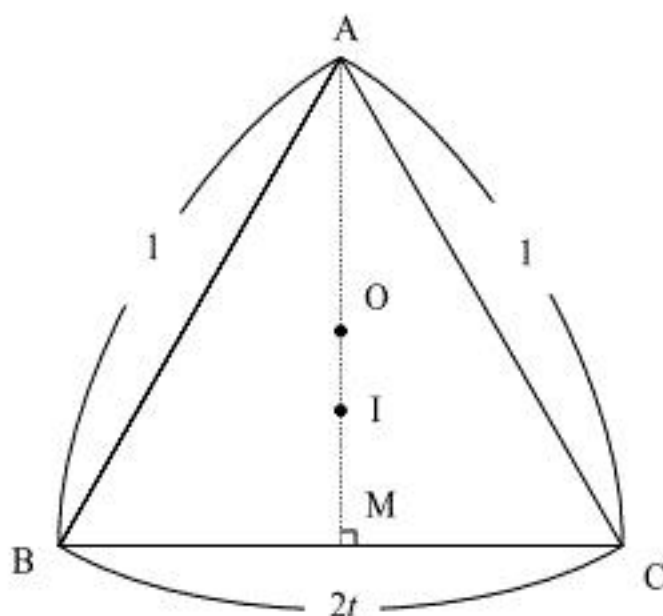
I

(1)

AB=AC であり BC の中点が M であることから, $AM \perp BC$ である。△ABC が鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形の場合に分けて考える。ここで △ABC が直角三角形となるのは $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときであるから, $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき △ABC は鋭角三角形, $\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 1$ のとき △ABC は鈍角三角形である。

[1] 鋭角三角形の場合

このとき図は下のようになる。



△ABM について三平方の定理より $AM = \sqrt{1-t^2}$ ($0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$) であるから,

$$S = \frac{1}{2} t \sqrt{1-t^2} \times 2 = t \sqrt{1-t^2} \left(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

となる。△OBM に三平方の定理を適用すると, $OM = \sqrt{1-t^2} - R$, $OB = R$, $BM = t$ より,

$$\begin{aligned} OB^2 &= OM^2 + BM^2 \\ \Leftrightarrow R^2 &= \left(R - \sqrt{1-t^2} \right)^2 + t^2 \\ \therefore R &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \left(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。また, r について S を r の式で表すと,

$$S = \frac{1}{2} (1+1+2t)r = (1+t)r$$

であり, これが $S = t\sqrt{1-t^2}$ に等しいから,

$$\begin{aligned} (1+t)r &= t\sqrt{1-t^2} \\ \therefore r &= \frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t} \left(0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

である。

[2] 鈍角三角形の場合

点 O の位置関係以外は [1] の場合と同様であるから S, r については同様に議論できる。 R

について, $OM = R - \sqrt{1-t^2}$, $OB = R$, $BM = t$ となるから,

$$\begin{aligned} OB^2 &= OM^2 + BM^2 \\ \Leftrightarrow R^2 &= \left(R - \sqrt{1-t^2} \right)^2 + t^2 \\ \therefore R &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} < t < 1 \right) \end{aligned}$$

でこれらの結果はすべて [1] の場合と等しくなる。

[3] 直角三角形の場合

$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから, [1], [2] と同様に解くことで,

$$S = \frac{1}{2}, R = \frac{\sqrt{2}}{2}, r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

[1], [2] で得られた結果に $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入すると, [3] の結果を含むことが分かる。

$$(\text{答}) \quad S = t\sqrt{1-t^2}, R = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}, r = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t}$$

(2)

r を t で微分すると, 積の微分法を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(t \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right) \\ &= (t)' \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + t \left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \right)' \\ &= \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + t \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}} \cdot \frac{-(1+t) - (1-t)}{(1+t)^2} \\ &= -\frac{t^2+t-1}{(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となる。この式の分母は $0 < t < 1$ で正であるから, t^2+t-1 の正負を調べる。

$t^2+t-1=0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であることを用いて $0 < t < 1$ で増減表を書くと, 次のようになる。

t	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	1
$\frac{dr}{dt}$		+	0	-	
r	0	↗	極大	↘	0

したがって r は $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(3)

$\sqrt{5} < 2.3$ より $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 0.65$ であり, 一方 $\sqrt{2} > 1.4$ より $\frac{\sqrt{2}}{2} > 0.7$ である。したがって

$0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから, △ABC は鋭角三角形である。このとき, $\frac{OM}{IM}$ は,

$OM = \sqrt{1-t^2} - R = \sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}$ を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{OM}{IM} &= \frac{\sqrt{1-t^2} - \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}}{\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t}} \\ &= \frac{1+t}{t} - \frac{1+t}{2t(1-t^2)} \\ &= \frac{1-2t^2}{2t(1-t)} \end{aligned}$$

となる。ここで, $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ は $t^2+t-1=0$ を満たすから,

$$\frac{OM}{IM} = \frac{1-2t^2}{2t-2t^2} = \frac{1-2(1-t)}{2t-2(1-t)} = \frac{2t-1}{4t-2} = \frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

II

(1)

以下では k は $2 \leq k \leq n$ を満たす自然数であるとする。 n 枚のカードから同時に 2 枚を抜く取

り出し方は全部で ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ (通り) であり, これらは同様に確からしい。このうち $a \leq k$

となるのは 2 枚のカードの番号が両方 k 以下であった場合で, 取り出し方は ${}_kC_2 = \frac{k(k-1)}{2}$

(通り) である。したがって p_k は,

$$p_k = \frac{\frac{k(k-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

となる。また, $a=k$ となるのは抜き出した 2 枚のうち 1 枚の番号が k でもう 1 枚の番号が k 未満であった場合であり, 取り出し方は $(k-1)$ 通りである。したがって q_k は,

$$q_k = \frac{k-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_k = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}, q_k = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

(2)

$b \leq k, b=k$ となる確率も a の場合と同様に表せる。 $a=b$ となる確率は, ある k に対して $a < k$ かつ $b=k$ を満たす確率をすべての k についてとった和である。 $a=k$ となる事象と $b=k$ となる事象は排反であるから, 確率 r は,

$$r = \sum_{k=2}^n q_k^2 = \frac{4}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=2}^n (k-1)^2 = \frac{4}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)}$$

(3)

$a < k$ となる確率は, $p_k - q_k = \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}$ で表せる。 $a < b$ となる確率は, ある k に対して

$a < k$ かつ $b=k$ を満たす確率をすべての k についてとった和である。 $a < k$ となる事象と $b=k$ となる事象は排反であるから, 確率 s は,

$$\begin{aligned} s &= \sum_{k=2}^n (p_k - q_k) q_k \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=2}^n (k-1)^2 (k-2) \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (k-1) \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k^3 - k^2) \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \left\{ \frac{1}{4} (n-1)^2 n^2 - \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1) \right\} \\ &= \frac{(3n-1)(n-2)}{6n(n-1)} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{(3n-1)(n-2)}{6n(n-1)}$$

(4)

事象 $|a-b|=1, a-b=1, a-b=-1, a=b$ となる確率をそれぞれ

$P(|a-b|=1), P(a-b=1), P(a-b=-1), P(a=b)$ のようにして表すと, これらの関係は,

$$t = P(|a-b|=1) = P(a-b=1) + P(a-b=-1) + P(a=b)$$

のようになる。ただし対称性により $P(a-b=1) = P(a-b=-1)$ であるから,

$$\begin{aligned} t &= P(a-b=1) + P(a-b=-1) + P(a=b) \\ &= 2P(a-b=1) + r \end{aligned}$$

と表せる。したがって, $P(a-b=1)$ を求めればよい。この確率は, ある k に対して $a=k$ かつ $b=k-1$ を満たす確率をすべての k についてとった和である。 $a=k$ となる事象と $b=k-1$ となる事象は排反であるから, 確率 $P(a-b=1)$ は,

$$\begin{aligned} P(a-b=1) &= \sum_{k=2}^n q_k q_{k-1} \\ &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=2}^n (k-1)(k-2) \\ &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) \\ &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} \left\{ \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1) - \frac{1}{2} (n-1) n \right\} \\ &= \frac{4(n-2)}{3n(n-1)} \end{aligned}$$

となる。したがって上の式より確率 t は,

$$\begin{aligned} t &= 2P(a-b=1) + r \\ &= \frac{8(n-2)}{3n(n-1)} + \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)} \\ &= \frac{2(2n-3)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$$

III

(1)

以下では合同式を $\text{mod } 4$ で考える。

[1] c が偶数, つまり $c \equiv 0, 2$ の場合

$c^2 \equiv 0$ であるから, $k = c^2 + d^2 \equiv d^2$ となる。 $d \equiv 0, 2$ の場合は $d^2 \equiv 0$, $d \equiv 1, 3$ の場合は $d^2 \equiv 1$ となる。つまりこの場合, k が奇数 $\Leftrightarrow d^2 \equiv 1$ となる。このとき $k = c^2 + d^2 \equiv 1$ となり, 示された。

[2] c が奇数, つまり $c \equiv 1, 3$ の場合

$c^2 \equiv 1$ であるから, $k = c^2 + d^2 \equiv 1 + d^2$ となる。 $d \equiv 0, 2$ の場合は $d^2 \equiv 0$, $d \equiv 1, 3$ の場合は $d^2 \equiv 1$ となる。つまりこの場合, k が奇数 $\Leftrightarrow d^2 \equiv 0$ となる。このとき $k = c^2 + d^2 \equiv 1$ となり, 示された。

$\therefore k = c^2 + d^2$ が奇数 $\Leftrightarrow k \equiv 1$ である。

(証明終)

(2)

$l = b^3 - a^3$ について, 因数分解すると,

$$l = b^3 - a^3 = (b - a)(b^2 + ab + a^2)$$

となる。ここで a, b は自然数であるから $b^2 + ab + a^2 \geq 1 + 1 + 1 = 3$ である。したがって l は素数であるから $b - a = 1$ であることが必要である。

$\therefore l = b^3 - a^3$ が素数 $\Rightarrow b = a + 1$ である。

(証明終)

(3)

(2)より, $b = a + 1$ である。 $a \equiv 0, 1, 2, 3$ のそれぞれの場合の b 及び $b^3 - a^3$ を 4 で割った余りを以下の表に示す。

a	0	1	2	3
b	1	2	3	0
$b^3 - a^3$	1	3	3	1

ここで, (2)より $b^3 - a^3 \geq 3$ であるから素数 $n = b^3 - a^3 = c^2 + d^2$ は奇数である。このとき(1)より, $n = b^3 - a^3 \equiv 1$ である。上の表よりこれを満たすのは $b \equiv 0, 1$ のときである。

(証明終)

(4)

(3)より, $b \equiv 0, 1$ である。これを満たす (a, b) の組を列挙し n の小さい順に以下の表に示す。ただし n は 200 以下の素数であるから, $n = b^3 - a^3$ が 200 を超えた時点で止めている。

a	3	4	7	8
b	4	5	8	9
$b^3 - a^3$	37	61	169	217

この表に示した n のうち, 200 以下でかつ $n = 37$ 以外の素数になるものは $(a, b) = (4, 5)$ の場合のみである。 $5^2 + 6^2 = 61$ であるからこれは(3)の条件を満たす。

(答) $n = 61, (a, b, c, d) = (4, 5, 5, 6)$

IV

(1)(a)

$f'(x) > 0, f(1) = 0$ より $f(x)$ は $x > 0$ で単調増加であり, $x > 1$ で $f(x) > 0$ である。したがって自然数 k に対して,

$$f(k) < \int_k^{k+1} f(x) dx < f(k+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。左の不等式について $k=1$ から $k=n$ までの総和をとると,

$$\sum_{k=1}^n f(k) < \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx$$

である。

(証明終)

(b)

式①の右の不等式について, $k=1$ から $k=n-1$ までの総和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k)$$

である。

(証明終)

(2)

(1)より, $x > 0$ で微分可能かつ $f'(x) > 0, f(1) = 0$ を満たす関数 $f(x)$ について,

$$\int_1^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x) dx$$

が成り立つ。関数 $\log x$ は $x > 0$ で上の条件を満たすから, $f(x) = \log x$ として,

$$\begin{aligned} \int_1^n (\log x) dx &< \sum_{k=1}^n (\log k) < \int_1^{n+1} (\log x) dx \\ \Leftrightarrow [x \log x - x]_1^n &< \log n! < [x \log x - x]_1^{n+1} \\ \therefore n \log n - n + 1 &< \log n! < (n+1) \log(n+1) - n \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

$\log K_n = \log \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{n} \log n! - \log n$ である。ここで(2)の結果について式変形すると,

$$\begin{aligned} n \log n - n + 1 &< \log n! < (n+1) \log(n+1) - n \\ \Leftrightarrow \log n - 1 + \frac{1}{n} &< \frac{1}{n} \log n! < \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log(n+1) - 1 \\ \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{n} &< \frac{1}{n} \log n! - \log n < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{n+1}{n} \frac{\log(n+1)}{n+1} - 1 \end{aligned}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n+1} \right) = 0$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{1}{n} \right) = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{n+1}{n} \frac{\log(n+1)}{n+1} - 1 \right\} = -1$

であるから, 挟み撃ちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \log n! - \log n \right) = -1$$

となる。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \log K_n = -1$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = e^{-1}$ である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = e^{-1}$