

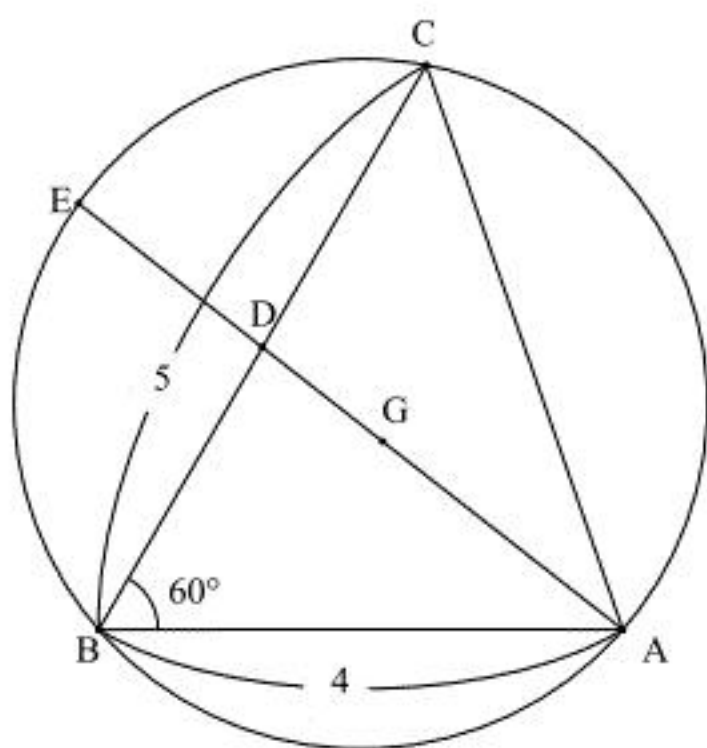
I

【解答】

(1)	ア	イ	ウ		
	2	1	7		
(2)	エ	オ	カ		
	5	3	3		
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ
	7	2	3	7	7

【解説】

(1)



三角形 ABC において余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 21 \end{aligned}$$

であり、 $AC > 0$ より $AC = \sqrt{21}$ である。また、 K の半径を R とすると、三角形 ABC において正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{AC}{\sin 60^\circ} \\ \therefore R &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。

(2)

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = 5\sqrt{3}$$

である。直線 AG と辺 BC の交点を D' とおくと、点 D' は辺 BC を二等分するから、三角形 ABD' の面積は三角形 ABC の面積の $\frac{1}{2}$ 倍である。また、点 G は線分 AD' を 2:1 に内分するから、三角形 ABG の面積は三角形 ABD' の面積の $\frac{2}{3}$ 倍である。よって、三角形 ABG の面積は

$$5\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(3)

(2) で定めた点 D' を点 D に置き換える。点 D は辺 BC の中点であるから

$$BD = \frac{5}{2}$$

である。よって、三角形 ABD において余弦定理より

$$\begin{aligned} AD^2 &= BD^2 + BA^2 - 2 \cdot BD \cdot BA \cdot \cos \angle B \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{49}{4} \end{aligned}$$

となり、 $AD > 0$ より $AD = \frac{7}{2}$ である。また、 $DC = DB = \frac{5}{2}$ であることと方べきの定理より、

$$\begin{aligned} DA \cdot DE &= DB \cdot DC \\ \frac{7}{2} \cdot DE &= \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \\ \therefore DE &= \frac{25}{14} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} AE &= AD + DE \\ &= \frac{7}{2} + \frac{25}{14} \\ &= \frac{37}{7} \end{aligned}$$

となる。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	1	5	1	5	1	1	0	4	1	5
(2)	シ	ス	セ	ソ	タ						
	4	5	5	2	4						

〔解説〕

(1)(i)

$X_1 < X_2 < X_3$ となるのは $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3$ となるときであり、その確率は

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{15}$$

である。

(ii)

$X_1 = X_2$ となる確率は $\frac{6}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ である。また $X_1 = X_2 < X_3$ となるとき、 $X_1 = X_2 = 1$ または

$X_1 = X_2 = 2, X_3 = 3$ であるから、求める確率は

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{10}$$

である。

(iii)

同じ数字が書かれた玉は2つしかないから、 $X_1 = X_2 = X_3$ となることはない。したがって、 $X_1 \leq X_2 \leq X_3$ となる確率は $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率、 $X_1 = X_2 < X_3$ となる確率、 $X_1 < X_2 = X_3$ となる確率の合計である。 $X_1 < X_2 = X_3$ となるとき、 $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 2$ または $X_2 = X_3 = 3$ である。その確率は

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

となる。したがって求める確率は

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$$

である。

(2)(i)

X_1, X_2, X_3 の最大値が3であるという事象の余事象は、一度も3が書かれた玉を出さないという事象であり、その確率は

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

である。よって、求める確率は

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

である。

(ii)

X_1, X_2, X_3 の最大値が3であり、かつ X_1, X_2 の最大値が2である確率を求める。このとき、

X_1, X_2, X_3 は $(X_1, X_2, X_3) = (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 2, 3)$ の場合のみであるから、その確率は

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{1}{\frac{6}{4} \cdot \frac{5}{5}} = \frac{5}{24}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	3	4	2	1	0	5	2	2
(2)	ケ	コ						
	2	5						
(3)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
	3	1	2	0	－	9	2	

〔解説〕

(1)

初項を a 、公差を d とすると、 $a_3 = 11, a_9 = 35$ より

$$a + 2d = 11 \quad \cdots \text{①}$$

$$a + 8d = 35 \quad \cdots \text{②}$$

となる。②－①より、 $6d = 24 \Leftrightarrow d = 4$ であり、①より $a = 3$ である。よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10(10+1) - 10 \\ &= 210 \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+k)(1+a_k)} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+k) \cdot 4k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{5}{22} \end{aligned}$$

である。

(2)

条件を満たす n は $b_n > 0$ を満たす最大の n である。 b_n を変形すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{10000}{4n-1} - (4n-1) \\ &= \frac{100^2 - (4n-1)^2}{4n-1} \end{aligned}$$

となる。よって

$$b_{25} = \frac{100^2 - 99^2}{99} > 0$$

$$b_{26} = \frac{100^2 - 103^2}{99} < 0$$

であるから、求める n は 25 である。

(3)

等式を n, l の式に直すと

$$\begin{aligned} 8n - 2 &= 12l - 3 + 9 \\ \Leftrightarrow 2n - 3l &= 2 \quad \cdots \text{③} \end{aligned}$$

となる。 $(n, l) = (4, 2)$ は③をみたすから

$$2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2 \quad \cdots \text{④}$$

である。③－④より

$$\begin{aligned} 2(n-4) - 3(l-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(n-4) &= 3(l-2) \quad \cdots \text{⑤} \end{aligned}$$

が得られ、2 と 3 は互いに素であるから、整数 k を用いて

$$\begin{aligned} n - 4 &= 3k \\ \Leftrightarrow n &= 3k + 4 \end{aligned}$$

と表すことができる。これを⑤に代入して $l = 2k + 2$ が得られる。 l, n がともに自然数となる最小の k は、 $k = -1$ のとき $(n, l) = (1, 0)$ 、 $k = 0$ のとき $(n, l) = (4, 2)$ より $k = 0$ である。よって、条件をみたす (n, l) の内、 n が 10 番目に小さい組は $k = 9$ のとき $(n, l) = (31, 20)$ である。また

$$\begin{aligned} l^2 - 12n &= (2k+2)^2 - 12 \cdot (3k+4) \\ &= 4k^2 - 28k - 44 \\ &= 4 \left(k - \frac{7}{2} \right)^2 - 93 \end{aligned}$$

であり、 k は 0 以上の整数であるから、 $l^2 - 12n$ の最小値は $k = 3$ または $k = 4$ のとき

$$4 \cdot \frac{1}{4} - 93 = -92$$

である。

Ⅳ

【解答】

(1)	ア	イ					
	2	1					
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	4	3	1	3	－	2	3
(3)	コ	サ	シ	ス	セ		
	2	3	8	2	7		

【解説】

(1)

線分 AB の中点が $(1, -1)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 2-a\end{aligned}$$

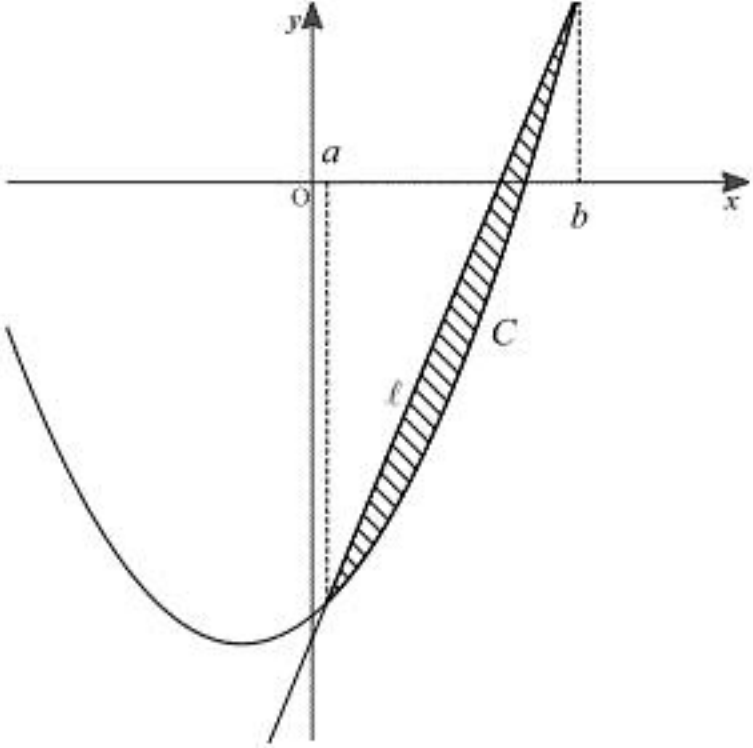
である。また

$$\begin{aligned}f(x)-g(x) &= (x-a)(x-b) \\ \Leftrightarrow x^2+px+q-3x+4 &= (x-a)(x+a-2) \\ \Leftrightarrow x^2+(p-3)x+q+4 &= x^2-2x-a^2+2a \qquad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、係数を比較すると、 $p-3=-2$ より $p=1$ が得られる。

(2)

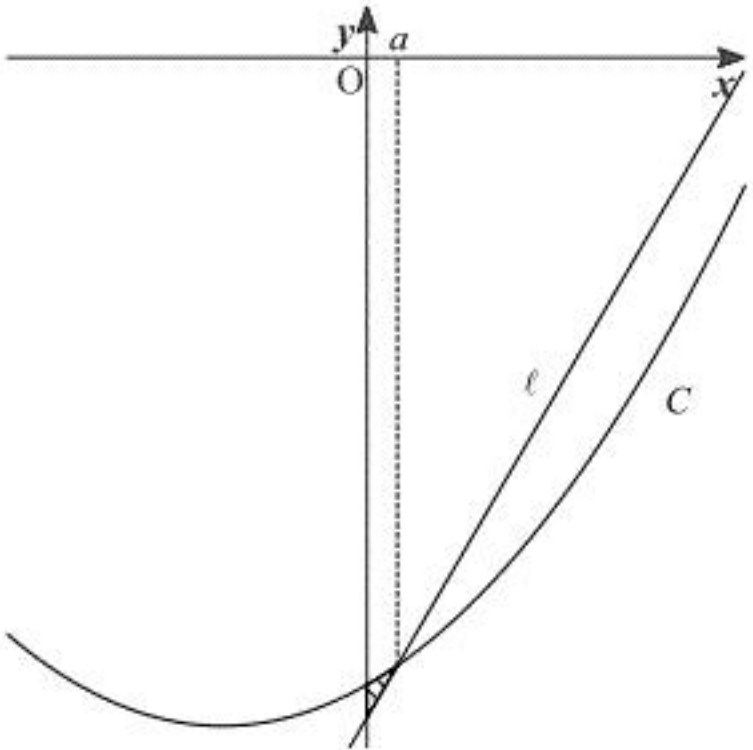
$0 < a < 1$ より $1 < b < 2$ であるから、 $a < b$ である。 S_1 について、求めるのは下図の斜線部の面積である。



よって、 $\textcircled{1}$ より S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_a^b \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2-2a)^3 \\ &= \frac{4}{3}(1-a)^3\end{aligned}$$

である。また、 S_2 について、求めるのは下図の斜線部の面積である。



よって、 $\textcircled{1}$ より S_2 は

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^a \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= \int_0^a (x^2-2x-a^2+2a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + (-a^2+2a)x \right]_0^a \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + a^2\end{aligned}$$

となる。

(3)

T を計算すると

$$\begin{aligned}T &= S_1 + S_2 \\ &= -\frac{4}{3}a^3 + 4a^2 - 4a + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a^3 + a^2 \\ &= -2a^3 + 5a^2 - 4a + \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。 T を a で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dT}{da} &= -6a^2 + 10a - 4 \\ &= -2(3a-2)(a-1)\end{aligned}$$

となり、 $0 < a < 1$ の範囲で $\frac{dT}{da} = 0$ とすると $a = \frac{2}{3}$ が得られる。よって、増減表は以下のようになる。

a	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$\frac{dT}{da}$		-	0	+	
T			$\frac{8}{27}$		

したがって、 T が最小となるのは $a = \frac{2}{3}$ のときであり、その値は $\frac{8}{27}$ である。