

I

(1)

点Aが x 方向へ1移動する回数, x 方向へ-1移動する回数, y 方向へ1移動する回数, y 方向へ-1移動する回数をそれぞれ q, r, s, t (ただし, q, r, s, t は非負整数)とする。点Aが点 $(3, 2)$ にあるとき, 非負整数 q, r, s, t について

$$\begin{cases} q+r+s+t=5 \\ q-r=3 \\ s-t=2 \end{cases}$$

が成り立つ。これを満たす (q, r, s, t) は, $(q, r, s, t)=(3, 0, 2, 0)$ である。したがって, 求める確率は,

$$\frac{5!}{3!2!} \left(\frac{p}{2}\right)^3 \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 = \frac{5p^3(1-p)^2}{16}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5p^3(1-p)^2}{16}$$

(2)

(1)と同様に考えると, q, r, s, t について

$$\begin{cases} q+r+s+t=9 \\ q-r=1 \\ s-t=4 \end{cases}$$

が成り立つ。これを満たす (q, r, s, t) は, $(q, r, s, t)=(1, 0, 6, 2), (2, 1, 5, 1), (3, 2, 4, 0)$ である。したがって, 求める確率は,

$$\begin{aligned} & \frac{9!}{6!2!} \left(\frac{p}{2}\right) \left(\frac{1-p}{2}\right)^8 + \frac{9!}{2!5!} \left(\frac{p}{2}\right)^3 \left(\frac{1-p}{2}\right)^6 + \frac{9!}{3!2!4!} \left(\frac{p}{2}\right)^5 \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 \\ &= \frac{63}{128} p(1-p)^8 + \frac{189}{64} p^3(1-p)^6 + \frac{315}{128} p^5(1-p)^4 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{63}{128} p(1-p)^8 + \frac{189}{64} p^3(1-p)^6 + \frac{315}{128} p^5(1-p)^4$$

(3)

まず, 試行を9回続けたとき, 点Aが点 $(3, 4)$ にある確率を求める。このとき, q, r, s, t について

$$\begin{cases} q+r+s+t=9 \\ q-r=3 \\ s-t=4 \end{cases}$$

が成り立つ。これを満たす (q, r, s, t) は, $(q, r, s, t)=(3, 0, 5, 1), (4, 1, 4, 0)$ である。したがって, 求める確率は

$$\frac{9!}{3!5!} \left(\frac{p}{2}\right)^3 \left(\frac{1-p}{2}\right)^6 + \frac{9!}{4!4!} \left(\frac{p}{2}\right)^5 \left(\frac{1-p}{2}\right)^4 = \frac{63}{64} p^3(1-p)^6 + \frac{315}{256} p^5(1-p)^4$$

である。同様にして, 点Aが点 $(4, 3)$ にある確率は,

$$\begin{cases} q+r+s+t=9 \\ q-r=4 \\ s-t=3 \end{cases}$$

を満たす (q, r, s, t) を考えると, $(q, r, s, t)=(5, 1, 3, 0), (4, 0, 4, 1)$ であるから, 確率は

$\frac{63}{64} p^6(1-p)^3 + \frac{315}{256} p^4(1-p)^5$ である。したがって, この2つの確率が等しくなるとき,

$$\begin{aligned} & \frac{63}{64} p^6(1-p)^3 + \frac{315}{256} p^4(1-p)^5 = \frac{63}{64} p^3(1-p)^6 + \frac{315}{256} p^5(1-p)^4 \\ & \Leftrightarrow \frac{63}{64} p^3(1-p)^3 \{p^3 - (1-p)^3\} = \frac{315}{256} p^4(1-p)^4 \{p - (1-p)\} \\ & \Leftrightarrow 252 \{p^3 - (1-p)^3\} = 315 p(1-p)(2p-1) \quad (\because p > 0, 1-p > 0) \\ & \Leftrightarrow 252(2p-1)(p^2 - p + 1) = 315 p(1-p)(2p-1) \\ & \Leftrightarrow (2p-1) \{252(p^2 - p + 1) - 315 p(1-p)\} = 0 \\ & \Leftrightarrow (2p-1)(9p^2 - 9p + 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \quad \left(\because 9p^2 - 9p + 4 = 9\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \right) \end{aligned}$$

である。 $p = \frac{1}{2}$ は $0 < p < 1$ を満たすから, 求める p の値は, $p = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{1}{2}$$

II

(1)

$$\begin{aligned}
 |x-1|-1 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow |x-1| &\geq 1 \\
 \Leftrightarrow x-1 &\leq -1, 1 \leq x-1 \\
 \Leftrightarrow x &\leq 0, 2 \leq x \\
 |x-1|-1 &< 0 \\
 \Leftrightarrow |x-1| &< 1 \\
 \Leftrightarrow -1 < x-1 &< 1 \\
 \Leftrightarrow 0 < x &< 2
 \end{aligned}$$

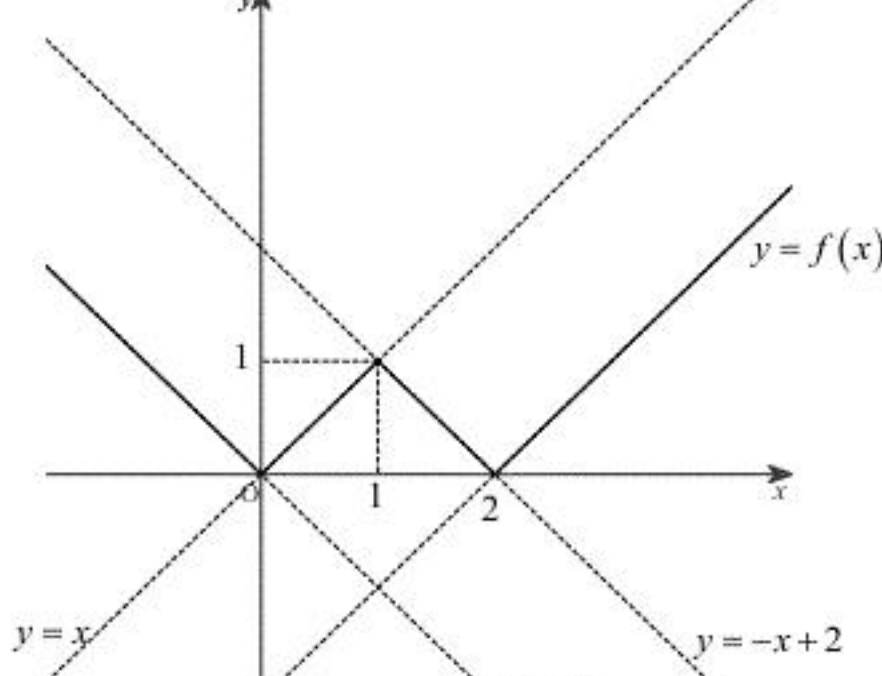
である。また、

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x < 1) \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} |x-1|-1 & (x \leq 0, 2 \leq x) \\ -|x-1|+1 & (0 < x < 2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (-x+1)-1 & (x \leq 0) \\ -(-x+1)+1 & (0 < x < 1) \\ -(x-1)+1 & (1 \leq x < 2) \\ (x-1)-1 & (2 \leq x) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x & (0 < x < 1) \\ -x+2 & (1 \leq x < 2) \\ x-2 & (2 \leq x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

となるから、 $y=f(x)$ のグラフは下図の通りである。

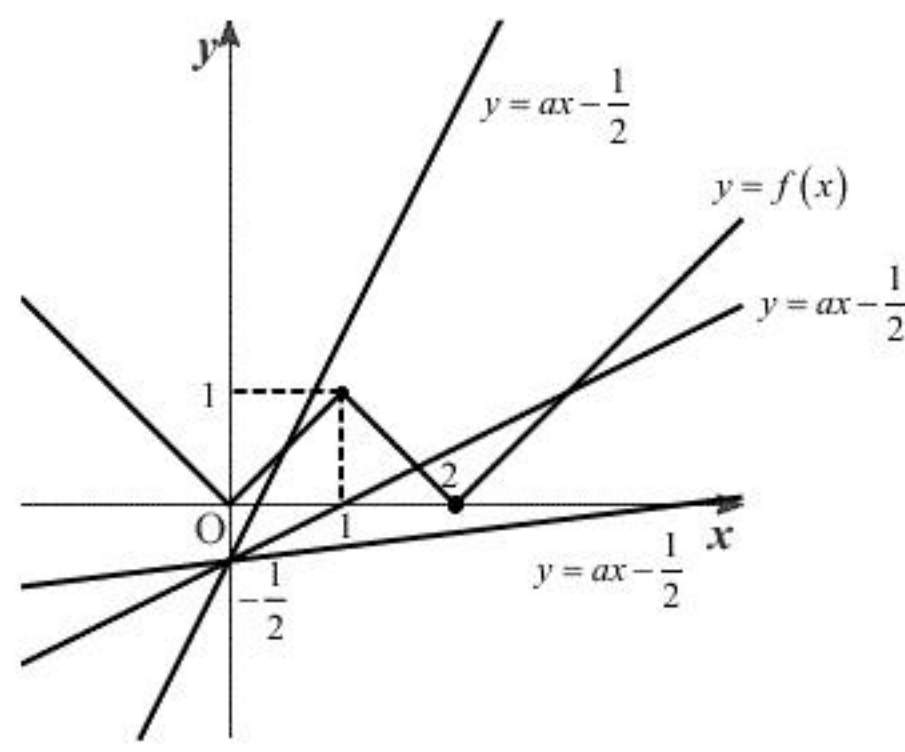


(答) 前図

(2)

$y=ax-\frac{1}{2}$ は傾き a 、 y 切片 $-\frac{1}{2}$ の直線である。 $a \geq 0$ に注意して直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ と曲線

$y=f(x)$ の共有点の個数を考えると、下図のように3つの場合に分けられる。



これらの3つの場合の境界となるのは、直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が直線 $y=x-2$ と平行になるときと、

直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が点 $(2,0)$ を通るときである。これはそれぞれ $a=1$ と $a=\frac{1}{4}$ と同値である。

したがって、 $y=ax-\frac{1}{2}$ と $y=f(x)$ のグラフの共有点の個数は、

$$\begin{cases} 0 \leq a < \frac{1}{4} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ a = \frac{1}{4}, 1 \leq a \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{4} < a < 1 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

(答) 前述

(3)

$$\begin{aligned}
 |x^2-1|-1 &> 0 \\
 \Leftrightarrow |x^2-1| &> 1 \\
 \Leftrightarrow x^2-1 &< -1, 1 < x^2-1 \\
 \Leftrightarrow x^2 &< 0, 2 < x^2 \\
 \Leftrightarrow x &< -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x \\
 |x^2-1|-1 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow |x^2-1| &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow -1 &\leq x^2-1 \leq 1 \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq x^2 \leq 2 \\
 \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq x \leq \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

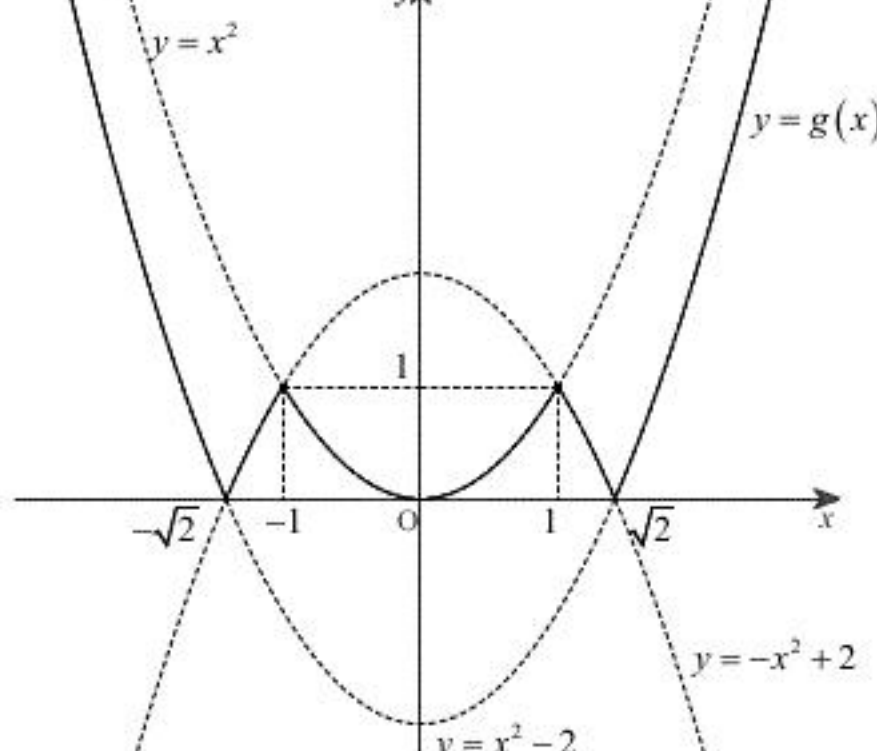
である。また、

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1, 1 \leq x) \\ -x^2+1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \begin{cases} |x^2-1|-1 & (x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x) \\ -|x^2-1|+1 & (-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} (x^2-1)-1 & (x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x) \\ -(x^2-1)+1 & (-\sqrt{2} \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq \sqrt{2}) \\ -(-x^2+1)+1 & (-1 < x < 1) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} x^2-2 & (x < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < x) \\ -x^2+2 & (-\sqrt{2} \leq x \leq -1, 1 \leq x \leq \sqrt{2}) \\ x^2 & (-1 < x < 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

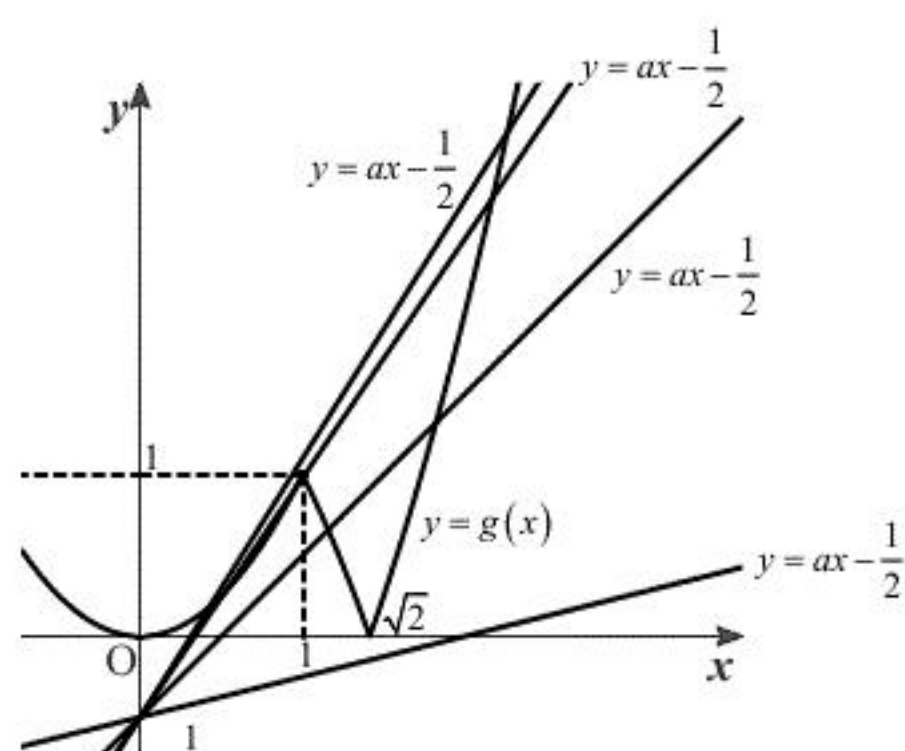
となるから、 $y=g(x)$ のグラフは下図の通りである。



(答) 前図

(4)

(2)と同様にグラフを用いて考える。下図のように場合分けできる。



これらの場合の境界となるのは、直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が点 $(\sqrt{2}, 0)$ を通るとき、直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ と曲

線 $y=x^2$ が接するとき、直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が点 $(1, 1)$ を通るときである。直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が点

$(\sqrt{2}, 0)$ を通るとき $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ である。次に直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ と曲線 $y=x^2$ が接するとき、2次方程

式

$$\begin{aligned}
 ax-\frac{1}{2} &= x^2 \\
 \Leftrightarrow x^2-ax+\frac{1}{2} &= 0
 \end{aligned}$$

の判別式が0であるから、

$$\begin{aligned}
 (-a)^2-4 \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\
 \therefore a &= \sqrt{2} \quad (\because a \geq 0)
 \end{aligned}$$

を得る。また、直線 $y=ax-\frac{1}{2}$ が点 $(1, 1)$ を通るとき $a=\frac{3}{2}$ である。したがって、 $y=ax-\frac{1}{2}$ と

$y=g(x)$ のグラフの共有点の個数は、

$$\begin{cases} 0 \leq a < \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ a = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} < a < \sqrt{2}, \frac{3}{2} < a \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ a = \sqrt{2}, \frac{3}{2} \text{ のとき, } 3 \text{ 個} \\ \sqrt{2} < a < \frac{3}{2} \text{ のとき, } 4 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

(答) 前述

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}x &= \frac{2x+1}{2x+3} \\ \Leftrightarrow x(2x+3) &= 2x+1 \left(\because x \neq -\frac{3}{2} \right) \\ \Leftrightarrow 2x^2+3x &= 2x+1 \\ \Leftrightarrow 2x^2+x-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{2}, -1\end{aligned}$$

となる。このうち、 $x > 0$ を満たすのは $x = \frac{1}{2}$ であるから、 $\alpha = \frac{1}{2}$ となる。

(答) $\alpha = \frac{1}{2}$

以下、数学的帰納法を利用して、すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して $a_n > \frac{1}{2}$ であることを示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2} \text{ より成り立つ。}$$

[2] $n = k$ (k は自然数) のとき

$$a_k > \frac{1}{2} \text{ であると仮定する。このとき}$$

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= \frac{2a_k+1}{2a_k+3} \\ &= 1 - \frac{2}{2a_k+3} \\ &> 1 - \frac{2}{4} \left(\because 2a_k+3 > 4 \right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから、 $a_{k+1} > \frac{1}{2}$ が成り立つ。したがって、 $n = k+1$ でも成立する。

以上、[1], [2] より、すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して $a_n > \frac{1}{2}$ が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$b_1 = \frac{1}{a_1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ である。また、} b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2a_n - 1} \text{ であるから、} b_n \neq 0 \text{ に注意して}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_n} &= \frac{2a_n - 1}{2} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。これを $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{2a_n+3}$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_{n+1}} + \frac{1}{2} &= \frac{\frac{2}{b_n} + 2}{\frac{2}{b_n} + 4} \\ &= \frac{2b_n + 2}{4b_n + 2} \\ &= \frac{(2b_n + 1) + 1}{4b_n + 2} \\ &= \frac{1}{4b_n + 2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{1}{4b_n + 2} \\ \therefore b_{n+1} &= 4b_n + 2\end{aligned}$$

である。

(答) $b_{n+1} = 4b_n + 2$

(3)

(2) の結果より、 $b_{n+1} + \frac{2}{3} = 4 \left(b_n + \frac{2}{3} \right)$ が成り立つ。よって、数列 $\left\{ b_n + \frac{2}{3} \right\}$ は初項 $b_1 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 、公比 4 の等比数列であるから、

$$\begin{aligned}b_n + \frac{2}{3} &= \frac{8}{3} \cdot 4^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{8 \cdot 4^{n-1} - 2}{3}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2^{2n+1} - 2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{3}{2^{2n+1} - 2} + \frac{1}{2}$

(4)

$4^n = l$ とおくと、

$$\begin{aligned}4^n a_n &= \frac{3 \cdot 4^n}{2 \cdot 4^n - 2} + \frac{4^n}{2} \\ &= \frac{3l}{2l-2} + \frac{l}{2}\end{aligned}$$

である。 n は自然数より、 $\frac{l}{2} = \frac{4^n}{2}$ は自然数であり、 $l \geq 4$ より $\frac{3l}{2l-2} > 0$ である。ゆえに、

$4^n a_n$ が自然数であるための必要十分条件は $\frac{3l}{2l-2}$ が自然数であることである。以下、 $\frac{3l}{2l-2}$

が自然数となる場合を考える。 $\frac{3l}{2l-2} = m$ (m は自然数) とおくと

$$\begin{aligned}\frac{3l}{2l-2} &= m \\ \Leftrightarrow 3l &= m(2l-2) \\ \Leftrightarrow 2ml - 2m - 3l &= 0 \\ \Leftrightarrow (2m-3)(l-1) &= 3\end{aligned}$$

である。 $2m-3, l-1$ は整数であるから、 $l \geq 4$ より

$$\begin{aligned}(2m-3, l-1) &= (1, 3) \\ \therefore (m, l) &= (2, 4)\end{aligned}$$

である。 $l = 4^n$ であるから、条件を満たす自然数 n は $n = 1$ である。このとき m も自然数であるから、適する。したがって、求める自然数は $n = 1$ である。

(答) $n = 1$