

$$x^4 - x^3 + 3x^2 - k = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + 3x^2 = k$$

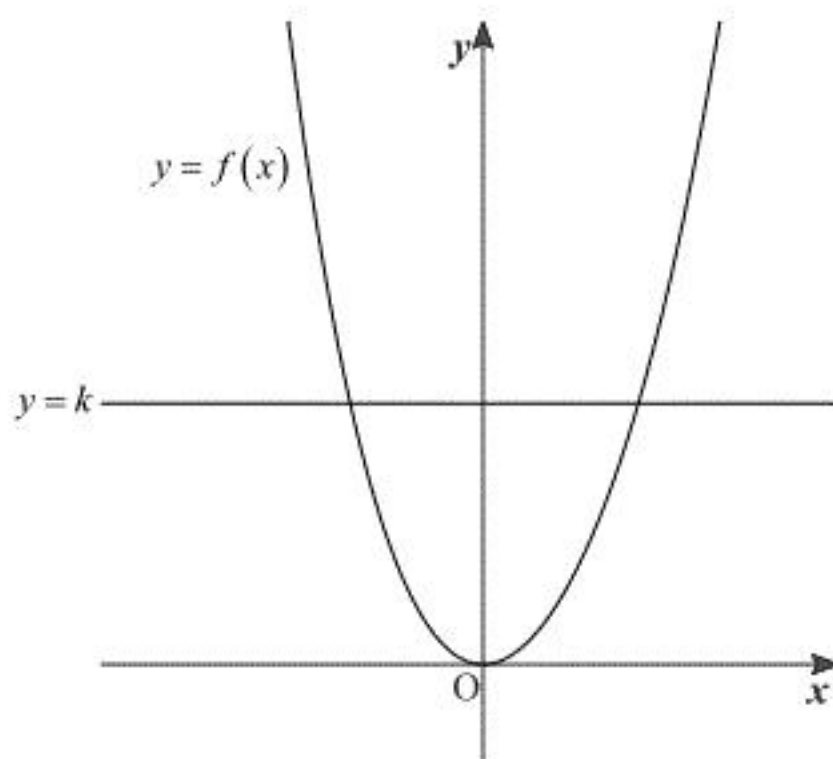
であるから、 $x^4 - x^3 + 3x^2 - k = 0$ の実数解の個数は $y = x^4 - x^3 + 3x^2$ と $y = k$ のグラフの交点の個数に等しい。 $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 3x^2 + 6x \\ &= x(4x^2 - 3x + 6) \\ &= x \left\{ 4 \left(x - \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{87}{16} \right\} \end{aligned}$$

であり、 $4 \left(x - \frac{3}{8} \right)^2 + \frac{87}{16} > 0$ より、 $f'(x) = 0$ とすると $x = 0$ である。よって、 $f(x)$ の増減は下表の通りである。

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって、 $y = f(x)$, $y = k$ のグラフを図示すると下図のようになる。



以上より、 $y = f(x)$ と $y = k$ のグラフが2個の交点をもつような k の範囲は、 $k > 0$ である。

(答) $k > 0$

II

(1)

$|\vec{p} + \vec{q}| = 1, |\vec{p} - \vec{q}| = 1$ の両辺をそれぞれ 2 乗して

$$|\vec{p}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $4\vec{p} \cdot \vec{q} = 0 \Leftrightarrow \vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より $2(|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2) = 2 \Leftrightarrow |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 = 1$ となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = 0, |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 = 1$$

(2)

(1)より $|\vec{p}|^2 = 1 - |\vec{q}|^2$ であり, $|\vec{p}| \geq 0, |\vec{q}| \geq 0$ より

$$1 - |\vec{q}|^2 \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq |\vec{q}| \leq 1$$

が必要となる。ここで, $\vec{p} = (0, 0), \vec{q} = (1, 0)$ のとき, $\vec{p} = (1, 0), \vec{q} = (0, 0)$ のときそれぞれ

$|\vec{p} + \vec{q}| = 1, |\vec{p} - \vec{q}| = 1$ が成立し, またそれぞれ $|\vec{q}| = 1, |\vec{q}| = 0$ となるため, 確かに $|\vec{q}|$ は

$|\vec{q}| = 1, |\vec{q}| = 0$ を取り得る。よって, $|\vec{q}|$ の最大値は 1, 最小値は 0 である。

(答) 最大値 1, 最小値 0

(3)

$|\vec{p} + 2\vec{q}| \geq 0$ であるから, $|\vec{p} + 2\vec{q}|$ の最大値, 最小値は $|\vec{p} + 2\vec{q}|^2$ の最大値の正の平方根, 最小値の正の平方根とそれぞれ一致する。(1)の結果より

$$\begin{aligned} |\vec{p} + 2\vec{q}|^2 &= |\vec{p}|^2 + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 \\ &= (|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2) + 4\vec{p} \cdot \vec{q} + 3|\vec{q}|^2 \\ &= 1 + 3|\vec{q}|^2 \end{aligned}$$

であり, (2)より $|\vec{q}|^2$ の最大値は 1, 最小値は 0 であるから $|\vec{p} + 2\vec{q}|^2$ の最大値は $1 + 3 \cdot 1 = 4$, 最小値は $1 + 0 = 1$, となる。以上より, $|\vec{p} + 2\vec{q}|$ の最大値は $\sqrt{4} = 2$, 最小値は $\sqrt{1} = 1$ である。

(答) 最大値 2, 最小値 1

Ⅲ

(1)

定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \int_1^2 \{(ax)^2 + x\} dx &= \frac{1}{a} \int_1^2 (a^2 x^2 + x) dx \\&= \frac{1}{a} \left[\frac{a^2 x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\&= \frac{1}{a} \left(\frac{7}{3} a^2 + \frac{3}{2} \right) \\&= \frac{7}{3} a + \frac{3}{2a}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{3}a + \frac{3}{2a}$$

(2)

a は正の数であるから、 $\frac{7}{3}a, \frac{3}{2a}$ も共に正の数である。よって、相加相乗平均の関係より

$$f(a) = \frac{7}{3}a + \frac{3}{2a} \geq 2\sqrt{\frac{7}{3}a \cdot \frac{3}{2a}} = \sqrt{14}$$

である。ただし等号成立は

$$\begin{aligned}\frac{7}{3}a &= \frac{3}{2a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{9}{14} \\ \therefore a &= \frac{3}{\sqrt{14}} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

のときである。以上より、 $f(a)$ は $a = \frac{3}{\sqrt{14}}$ のとき最小値 $\sqrt{14}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \sqrt{14}, a \text{ の値 } \frac{3}{\sqrt{14}}$$

IV

(1)

さいころを1回投げて偶数の目が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 、奇数の目が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。さい

ころを2回投げた後にAさんとBさんが同じ個数のバッジを持つのは、さいころを2回投げて1回は奇数の目、もう1回は偶数の目が出るときである。よって、求める確率は

$${}_2C_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

さいころを投げる前、Aさんが持つバッジの総ポイントはBさんが持つバッジの総ポイントより大きいから、2回のさいころ投げの後にAさんとBさんの総ポイントが同じになるためには1回目のさいころ投げで偶数が出てBさんがAさんにバッジを渡した後、2回目のさいころ投げで奇数を出さなければならない。このときAさんとBさんは同じ個数のバッジを持っているから、総ポイント数が同じになるには金のバッジと銀のバッジを5枚ずつ持っていないなければならない。よって、1回目のさいころ投げで偶数の目を出してBさんがAさんに銀のバッジを1個渡し、2回目のさいころ投げで奇数の目を出してAさんがBさんに金、銀のバッジをそれぞれ1個ずつ渡す、もしくは1回目のさいころ投げで偶数の目を出してBさんがAさんに金のバッジを1個渡し、2回目のさいころ投げで奇数の目を出してAさんがBさんに金のバッジを2個渡せばよい。以上より、求める確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_6C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_{12}C_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_7C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{1}{9}$$

である。

(答) $\frac{1}{9}$