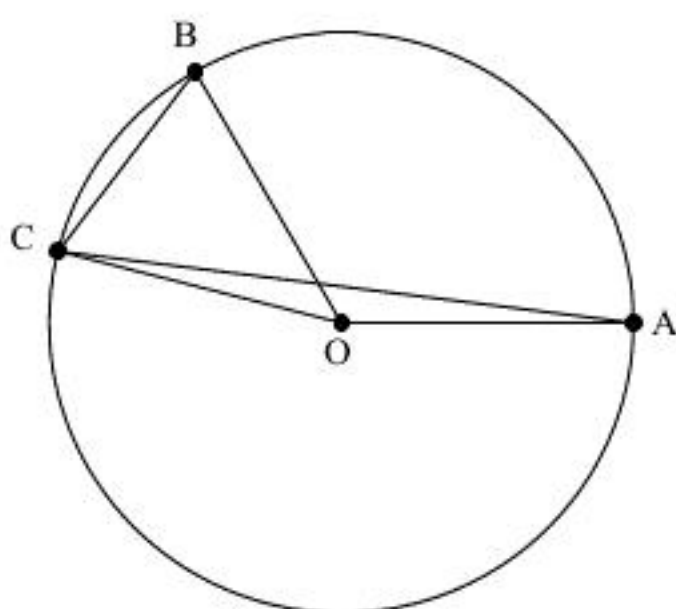


I

(1)



円周角の定理より,

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \frac{1}{2} \angle AOB \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

である。また、余弦定理より

$$\begin{aligned}AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB \\ \Leftrightarrow AB^2 &= r^2 + r^2 + r^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 &= 3r^2\end{aligned}$$

である。ここで、 $BC = x$ とおくと $AC = 3x$ であり、余弦定理より

$$\begin{aligned}AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB \\ \Leftrightarrow 3r^2 &= 9x^2 + x^2 - 3x^2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\sqrt{21}}{7} r \quad (\because x > 0, r > 0)\end{aligned}$$

となるから、 $AC = \frac{3\sqrt{21}}{7} r$ とわかる。

(答) $\frac{3\sqrt{21}}{7} r$

(2)

余弦定理より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC \\ &= OA \cdot OC \cdot \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA \cdot OC} \\ &= \frac{1}{2} \left(2r^2 - \frac{27}{7} r^2 \right) \\ &= -\frac{13}{14} r^2\end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{13}{14} r^2$

(3)

$\triangle AOC$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{(|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}|)^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{r^2 \cdot r^2 - \left(-\frac{13}{14} r^2 \right)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{28} r^2\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{28} r^2$

II

(1)

題意の命題の対偶は「 a, b, c のいずれかが1つでも奇数であるならば、 $a+b+c, ab+bc+ca$ のいずれかは奇数である」ことであり、これを証明する。 a を奇数とする。ここで、 $a+b+c$ が偶数であると仮定すると、 a が奇数であることより、 b, c のいずれか一方は奇数、他方は偶数である。このとき、 $ab+bc+ca$ は(奇数) $\times$ (奇数)+(奇数) $\times$ (偶数)+(奇数) $\times$ (偶数)となるから奇数である。したがって、 a, b, c のいずれかが1つでも奇数であるならば、 $a+b+c, ab+bc+ca$ のいずれかは奇数であり、題意は示された。

(証明終)

(2)

命題は真である。題意の命題の対偶は「 a, b, c のいずれかが1つでも4の倍数でないならば、 $a+b+c, ab+bc+ca$ のいずれかは8の倍数でない」ことであり、これを証明する。(1)より、 a, b, c のいずれかが1つでも奇数であるならば、 $a+b+c, ab+bc+ca$ のいずれかは奇数であるから、以下では a, b, c がすべて偶数の場合を考える。このとき、 a', b', c' を整数として $a=2a', b=2b', c=2c'$ と表せる。 a を4の倍数でない、すなわち a' は奇数であるとする。ここで、 $a+b+c$ が8の倍数であると仮定すると、

$$a+b+c=2(a'+b'+c')$$

より $a'+b'+c'$ は偶数であることが必要である。すなわち、 a' は奇数であるから、 b', c' のいずれか一方は奇数、他方は偶数であることが必要である。このとき、

$$ab+bc+ca=4(a'b'+b'c'+c'a')$$

より、 $a'b'+b'c'+c'a'$ は奇数であるから $ab+bc+ca$ は8の倍数ではない。したがって、 a, b, c のいずれかが1つでも4の倍数でないならば、 $a+b+c, ab+bc+ca$ のいずれかは8の倍数ではなく、題意は示された。

(証明終)

Ⅲ

(1)

$y = ax^2 + bx + c$ について

$$y' = 2ax + b$$

より, l の方程式は

$$y = (2ap + b)(x - p) + ap^2 + bp + c$$

$$\Leftrightarrow y = (2ap + b)x - ap^2 + c$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = (2ap + b)x - ap^2 + c$$

(2)

α, β は C_1, l の方程式を連立した

$$x^2 = (2ap + b)x - ap^2 + c$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2ap + b)x + ap^2 - c = 0$$

の異なる 2 実数解である。よって, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2ap + b \\ \alpha\beta = ap^2 - c \end{cases}$$

となるから,

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (2ap + b)^2 - 4(ap^2 - c) \\ &= 4a(a-1)p^2 + 4abp + b^2 + 4c \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad 4a(a-1)p^2 + 4abp + b^2 + 4c$$

(3)

x についての 2 次方程式 $x^2 - (2ap + b)x + ap^2 - c = 0$ の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= (2ap + b)^2 - 4(ap^2 - c) \\ &= 4a(a-1)p^2 + 4abp + b^2 + 4c \end{aligned}$$

となる。ここで, l と C_1 で囲まれた部分が存在する条件は, x についての方程式

$x^2 - (2ap + b)x + ap^2 - c = 0$ が相異なる 2 つの実数解 α, β をもつことであり,

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow 4a(a-1)p^2 + 4abp + b^2 + 4c &> 0 \end{aligned}$$

が成り立つことである。以下ではこの条件の下で考える。 C_1 は下に凸な二次関数であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(2ap + b)x - ap^2 + c - x^2\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

である。ここで, $\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ が p の値によらず一定であることと, $(\alpha - \beta)^2$ が p の値によらず

一定であることは同値である。(2)より, $(\alpha - \beta)^2 = 4a(a-1)p^2 + 4abp + b^2 + 4c$ が p について

恒等的に一定である条件は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4a(a-1) = 0 \\ 4ab = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = 1, b = 0 & (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

となる。また, α, β の存在条件より, $b^2 + 4c > 0 \Leftrightarrow c > 0$ である。このとき,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ (\alpha - \beta)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} (\because \alpha < \beta) \\ &= \frac{1}{6} (4c)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{4}{3} c^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{条件: } a = 1, b = 0, c > 0, \text{ 面積: } S = \frac{4}{3} c^{\frac{3}{2}}$$