

I

(1)

x の 2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 + 3a = 0$ の判別式を D とすると、求める条件は $D \geq 0$ より

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4(a^2 + 3a) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -3a(a + 4) &\geq 0 \\ \therefore -4 \leq a &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。 a は整数より、 $a = -4, -3, -2, -1, 0$ である。

(答) $a = -4, -3, -2, -1, 0$

(2)

少なくとも 1 つ実数解を持つことが必要なので、(1) より $a = -4, -3, -2, -1, 0$ が候補となる。

2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 + 3a = 0$ を解くと、

$$x = \frac{a \pm \sqrt{-3a(a+4)}}{2}$$

である。

[1] $a = -4$ のとき

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-3 \cdot (-4) \cdot 0}}{2} = -2$$

より整数解をもつので、適する。

[2] $a = -3$ のとき

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3 \cdot (-3) \cdot (-3+4)}}{2} = 0, -3$$

より整数解をもつので、適する。

[3] $a = -2$ のとき

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-3 \cdot (-2) \cdot (-2+4)}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

より整数解をもたず、不適である。

[4] $a = -1$ のとき

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 \cdot (-1) \cdot (-1+4)}}{2} = 1, -2$$

より整数解をもつので、適する。

[5] $a = 0$ のとき

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{-3 \cdot 0 \cdot 4}}{2} = 0$$

より整数解をもつので、適する。

以上、[1], [2], [3], [4], [5] より、満たす a の値は $a = -4, -3, -1, 0$ である。

(答) $a = -4, -3, -1, 0$

Ⅱ

(1)

$$3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 5\overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = \vec{0}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$$

となる。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立であるので x, y は一意に定まり、 $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right)$ である。

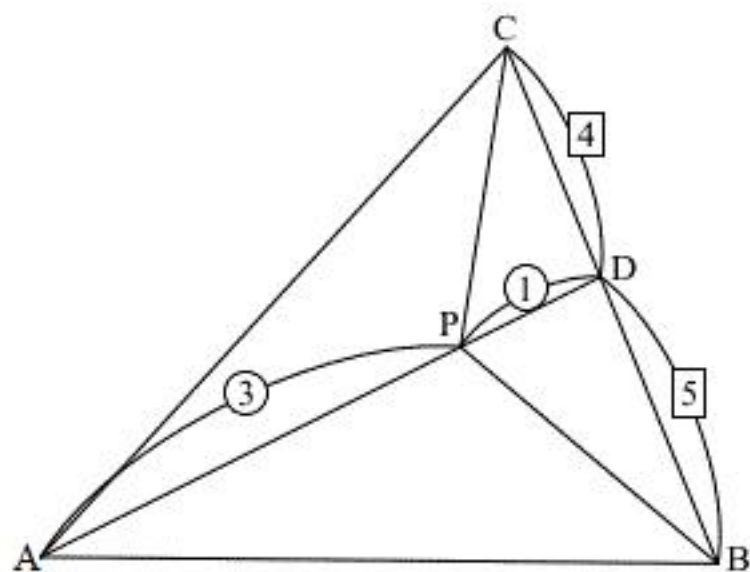
$$(\text{答}) (x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right)$$

(2)

線分 BC を $5:4$ に内分した点を D とすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

となる。よって、点 P は線分 AD を $3:1$ に内分した点である。したがって、 $\triangle ABC$ と点 P を図示すると、以下ようになる。



よって、

$$\begin{cases} \triangle ADB : \triangle ADC = 5 : 4 \\ \triangle BPA : \triangle BPD = \triangle CPA : \triangle CPD = 3 : 1 \end{cases}$$

より、

$$\begin{aligned}\triangle ABP : \triangle ACP : \triangle BCP &= \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \triangle ABC : \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \triangle ABC : \frac{1}{4} \cdot \triangle ABC \\ &= 5 : 4 : 3\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \triangle ABP : \triangle ACP : \triangle BCP = 5 : 4 : 3$$

Ⅲ

(1)

$2^x = t$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \cdot 2^{x+3} - 8^x \\ &= 3 \cdot 8 \cdot 2^x - (2^x)^3 \\ &= -t^3 + 24t \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(x) = -t^3 + 24t$

(2)

$g(t) = -t^3 + 24t$ とすると, $f(x) = g(t)$ である。また, $2^x = t$ より $t > 0$ である。

$$\begin{aligned} g'(t) &= -3t^2 + 24 \\ &= -3(t - 2\sqrt{2})(t + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

より, $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$2\sqrt{2}$	...
$g'(t)$		+	0	-
$g(t)$	(0)		$32\sqrt{2}$	

よって, $g(t)$ は $t = 2\sqrt{2}$ のとき, 最大値 $32\sqrt{2}$ をとる。 $t = 2\sqrt{2}$ となるのは, $2^x = t$ から

$$\begin{aligned} 2^x &= 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

のときである。

(答) $x = \frac{3}{2}$ のとき, 最大値 $32\sqrt{2}$

IV

(1)

袋から3個の玉を同時に取り出すとき、その取り出し方は ${}_9C_3 = 84$ (通り)存在し、これらは同様に確からしい。袋には赤玉が4個、白玉が3個、青玉が2個入っているので、それぞれの色の玉を1個ずつ取り出す場合の数は、

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は、

$$\frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

である。

(答) $\frac{2}{7}$

(2)

余事象について考える。余事象は「赤玉を1個も取り出さない」事象であり、この場合の数は、

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

である。よって、求める確率は

$$1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$$

である。

(答) $\frac{37}{42}$