

I

〔解答〕

(1)	$76_{(8)}$	(2)	$\frac{7}{11}$
(3)	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$	(4)	38 桁
(5)	$a = -3, b = 1$	(6)	$\frac{32}{3}$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} 2022_{(3)} &= 2 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 \\ &= 62_{(10)} \\ &= 7 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 \\ &= 76_{(8)} \end{aligned}$$

である。

(2)

1 個目に取り出した玉と 2 個目に取り出した玉がともに白玉である確率は、

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}$$

である。また、1 個目に取り出した玉が赤玉で、2 個目に取り出した玉が白玉である確率は、

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$$

である。したがって、求める条件付き確率は、

$$\frac{\frac{14}{33}}{\frac{14}{33} + \frac{8}{33}} = \frac{7}{11}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x &> 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + \sin x &> 0 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) &> 0 \\ \therefore \frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、この不等式を満たす x の範囲は $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ である。

(4)

15^{32} の常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 15^{32} &= 32 \log_{10} \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 32(1 + \log_{10} 3 - \log_{10} 2) \\ &= 32(1 + 0.4771 - 0.3010) \\ &= 37.6352 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} 37 &\leq \log_{10} 15^{32} < 38 \\ \therefore 10^{37} &\leq 15^{32} < 10^{38} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 15^{32} は 38 桁の整数である。

(5)

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ とおく。このとき $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ である。ここで、曲線 $y = f(x)$ が点 $(1, -1)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 \\ \Leftrightarrow 1 + a + b &= -1 \\ \therefore a + b &= -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、この点における接線の傾きが -3 であるため、

$$\begin{aligned} f'(1) &= -3 \\ \Leftrightarrow 3 + 2a &= -3 \\ \therefore a &= -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

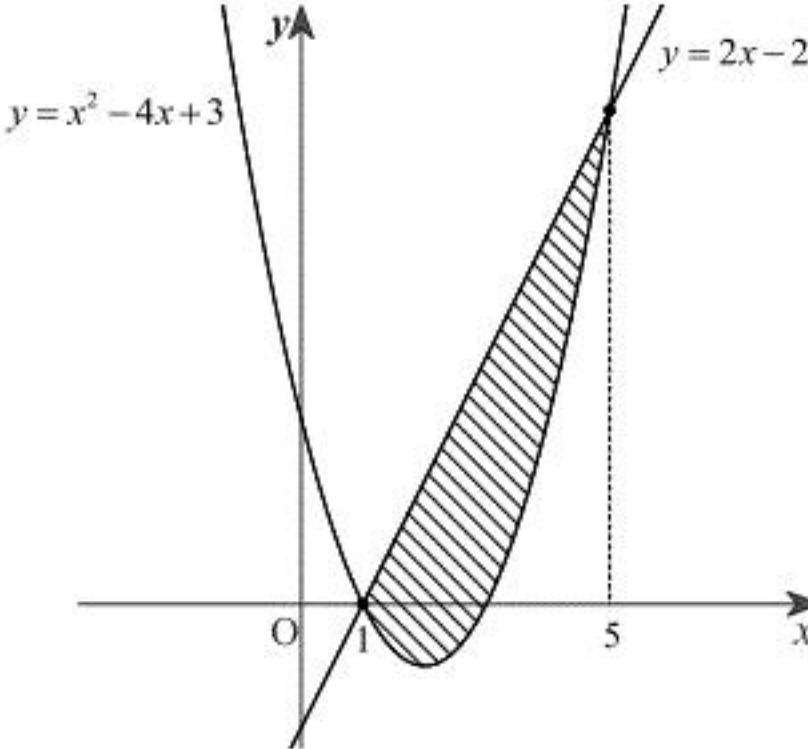
が得られる。さらに、②を①に代入し $b = 1$ となる。以上より、定数 a, b の値は $(a, b) = (-3, 1)$ である。

(6)

放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = 2x - 2$ との共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 2x - 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5) &= 0 \\ \therefore x &= 1, 5 \end{aligned}$$

となる。したがって、放物線 $y = x^2 - 4x + 3$ と直線 $y = 2x - 2$ で囲まれる図形は下図の斜線部となる。



ゆえに、求める面積は

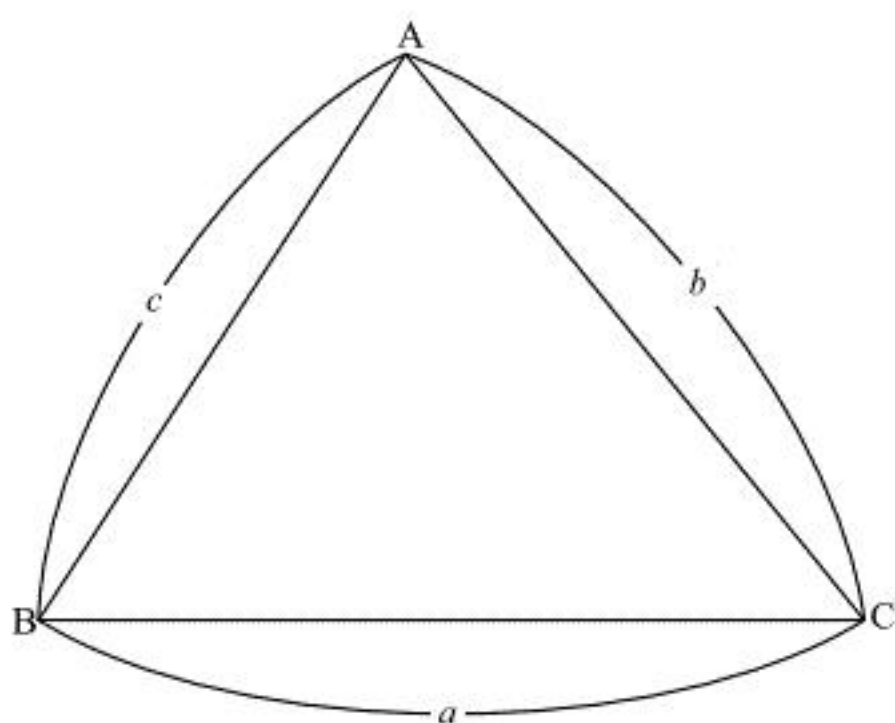
$$\begin{aligned} \int_1^5 \{2x - 2 - (x^2 - 4x + 3)\} dx &= -\int_1^5 (x^2 - 6x + 5) dx \\ &= -\int_1^5 (x - 1)(x - 5) dx \\ &= \frac{(5 - 1)^3}{6} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

である。

II

(1)

辺 AB, BC, CA の長さをそれぞれ c, a, b とおく。



$\triangle ABC$ において、条件より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} bc \cos(\pi - A) = -2 \\ ca \cos(\pi - B) = -4 \\ ab \cos(\pi - C) = -5 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} bc \cos A = 2 \\ ca \cos B = 4 \\ ab \cos C = 5 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。さらに、 $\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

となるため、 $\textcircled{1}$ を代入し

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 4 \\ b^2 = c^2 + a^2 - 8 \\ c^2 = a^2 + b^2 - 10 \end{cases}$$

が成り立つ。この連立方程式を解き、 $(a^2, b^2, c^2) = (9, 7, 6)$ が得られる。 a, b, c は正である

ため、 $(a, b, c) = (3, \sqrt{7}, \sqrt{6})$ となる。したがって3辺 AB, BC, CA の長さはそれぞれ

$AB = \sqrt{6}, BC = 3, CA = \sqrt{7}$ である。

(答) $AB = \sqrt{6}, BC = 3, CA = \sqrt{7}$

(2)

$\textcircled{1}$ より、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}) = 2$ であるため、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 7 - 2^2} \\ &= \frac{\sqrt{38}}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{38}}{2}$

Ⅲ

(1)

$0 \leq a, 0 \leq b \leq 9$ を満たす整数 a, b を用いて $x = 10a + b$ とおくと,

$$\begin{aligned} x^2 &= (10a + b)^2 \\ &= 100a^2 + 20ab + b^2 \\ &= 10(10a^2 + 2ab) + b^2 \end{aligned}$$

となるので、 x の下一桁と x^2 の下一桁の関係は、 a の値によらない。ここで、 x の下一桁と x^2 の下一桁との関係は次表のようになる。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

ゆえに、 x の下一桁と x^2 の下一桁が一致するのは x の下一桁が 0, 1, 5, 6 となる場合である。したがって、 $10 \leq x \leq 40$ の範囲で x の下一桁と x^2 の下一桁が一致するような x の個数は $3 \cdot 4 + 1 = 13$ より、13 個である。

(答) 13 個

(2)

(1)より、 x^2 の下一桁と x^4 の下一桁が一致するのは x^2 の下一桁が 0, 1, 5, 6 となる場合である。前表より、これを満たす x の下一桁は 0, 1, 4, 5, 6, 9 となる。これらの和の下一桁は $0 + 1 + 4 + 5 + 6 + 9 = 25$ より 5 であるから、 $10 \leq x \leq 99$ の範囲で x^2 の下一桁と x^4 の下一桁が一致する x をすべて足した数 Y の下一桁は、 x の 10 の位の値である 1 から 9 の 9 個だけ 5 を足し合わせた数の下一桁と等しくなる。 $5 \cdot 9 = 45$ より、求める Y の下一桁は 5 である。

(答) 5

(3)

$10 \leq x \leq 99$ の範囲で x^2 の下二桁が x と等しくなるとき、自然数 n を用いて

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 100n \\ \Leftrightarrow x(x-1) &= 4 \cdot 25 \cdot n \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $x, x-1$ は連続する 2 整数であるため互いに素であるから、 $x, x-1$ は共通の素因数を持たない。また $x < 100$ より、一方が 25 の倍数でもう一方が 4 の倍数となる。ここで $10 \leq x \leq 99, 9 \leq x-1 \leq 98$ より、 $x, x-1$ のどちらか一方は 25, 50, 75 のいずれかとなる。この下で、 $x, x-1$ の取る値によって場合分けして考える。

[1] $x, x-1$ のいずれかが 25 となるとき

このとき、もう一方が 4 の倍数であるような x の値は $x = 25$ である。

[2] $x, x-1$ のいずれかが 50 となるとき

このとき、もう一方が 4 の倍数となることはなく不適である。

[3] $x, x-1$ のいずれかが 75 となるとき

このとき、もう一方が 4 の倍数であるような x の値は $x = 76$ である。

以上、[1], [2], [3]より、 $10 \leq x \leq 99$ の範囲で x^2 の下二桁が x と等しいものは $x = 25, 76$ である。

(答) $x = 25, 76$