

I

【解答】

(1)	$x = \frac{2}{3}, 4$
(2)	$a = -2$
(3)	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
(4)	2
(5)	$\frac{\sqrt{910}}{2}$
(6)	$0 < a < 4$

【解説】

(1)

x の範囲について場合分けを行う。

[1] $x \geq 3$ のとき

与式より、

$$\begin{aligned}(x-1)+2(x-3) &= 5 \\ \Leftrightarrow 3x &= 12 \\ \therefore x &= 4\end{aligned}$$

である。これは $x \geq 3$ を満たす。

[2] $1 \leq x < 3$ のとき

与式より、

$$\begin{aligned}(x-1)+2(3-x) &= 5 \\ \therefore x &= 0\end{aligned}$$

である。これは $1 \leq x < 3$ を満たさず、不適である。

[3] $x < 1$ のとき

与式より、

$$\begin{aligned}(1-x)+2(3-x) &= 5 \\ \Leftrightarrow 3x &= 2 \\ \therefore x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

である。これは $x < 1$ を満たす。

以上、[1], [2], [3]より、求める方程式の解は $x = \frac{2}{3}, 4$ である。

(2)

3点 A, B, C が同一直線上にあるとき、 $\overline{AB} = (6, -3)$, $\overline{AC} = (2a+2, 1)$ より、実数 r を用いて、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= r\overline{AC} \\ \therefore (6, -3) &= r(2a+2, 1)\end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 6 = r(2a+2) \\ -3 = r \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} r = -3 \\ a = -2 \end{cases}\end{aligned}$$

が得られる。

(3)

三角関数の合成より、

$$\sin \theta - \cos \theta = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

となるから、 $0 < \theta < \pi$ のとき、 $\sin \theta - \cos \theta > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となる。ここで、

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

である。よって、辺々を足して、

$$\begin{aligned}(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \frac{3}{2} \\ \therefore \sin \theta - \cos \theta &= \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\because \sin \theta - \cos \theta > -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

が得られる。

(4)

真数条件より、

$$\begin{aligned}x-2 > 0, 8-x > 0 \\ \therefore 2 < x < 8\end{aligned}$$

が得られる。また、与式より、

$$\begin{aligned}y &= \log_3 (x-2) + \log_3 (8-x) \\ &= \log_3 (x-2)(8-x) \\ &= \log_3 (-x^2 + 10x - 16) \\ &= \log_3 \{ -(x-5)^2 + 9 \}\end{aligned}$$

となる。ここで、底3は1より大きいから、 $2 < x < 8$ の範囲で $-(x-5)^2 + 9$ が最大値をとるとき、与えられた関数も最大値をとる。よって、 $x=5$ のとき、最大値 $\log_3 9 = 2$ をとる。

(5)

$\overline{OA} = (1, -3, -4)$, $\overline{OB} = (-5, -3, 1)$ であるから、 $\triangle OAB$ の面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2\} \{(-5)^2 + (-3)^2 + 1^2\} - \{1 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-3) + (-4) \cdot 1\}^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{26 \cdot 35 - 0} \\ &= \frac{\sqrt{910}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(6)

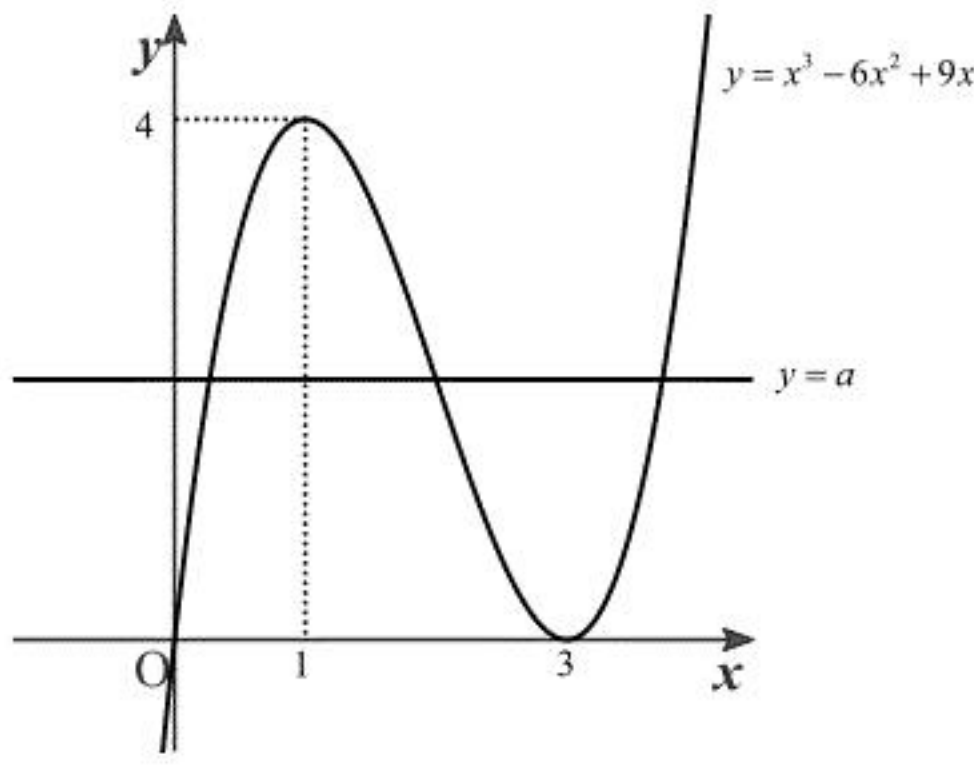
3次方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x = a$ の異なる実数解の個数と $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ と $y = a$ の交点の個数は一致する。ここで、 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ とすると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、グラフは以下のようになる。



したがって、グラフより、3次方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x = a$ が異なる3つの実数解をもつための条件は、

$$0 < a < 4$$

となる。

II

〔解答〕

(1)

$$p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{13}{25}$$

(2)

$n+1$ 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数であるのは、 n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が偶数であり、 $n+1$ 回目の試行で偶数の書かれたカードを取り出す場合と、 n 回の試行で取り出したカードの数字の合計が奇数であり、 $n+1$ 回目の試行で奇数の書かれたカードを取り出す場合であり、これらの事象は互いに背反であるから、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n) \\ &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n \\ \therefore p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$ 、公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列となる。よって、

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{2} &= \left(-\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

〔解説〕

(1)

$n=1$ のとき、取り出したカードの数字の合計が偶数であるのは、2, 4の書かれたカードを取り出したときである。よって、

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

である。また、 $n=2$ のとき、取り出したカードの数字の合計が偶数であるのは、取り出したカードの数字がいずれも奇数である場合といずれも偶数である場合であり、これらの事象は互いに背反であるから、

$$p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$$

である。

Ⅲ

【解答】

(1)

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{2}{1+t^2} \right)$$

(2)

(1)より,

$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{2}{1+t^2} \end{cases}$$

である。このとき、 $y > 0$ である。ここで、

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{1+t^2} \\ \Leftrightarrow (1+t^2)y &= 2 \\ \therefore t^2 &= \frac{2}{y} - 1 \end{aligned}$$

であるから、

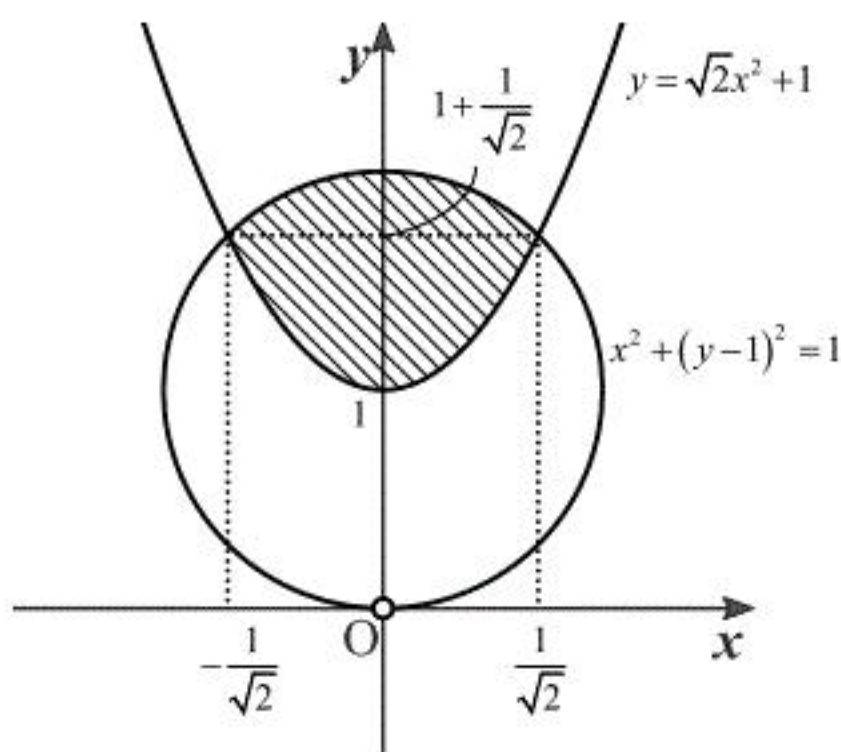
$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{y} - 1 \right)}{\left(\frac{2}{y} \right)^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2y - y^2 \\ \therefore x^2 + (y-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、求める軌跡は「円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ かつ $y > 0$ 」、つまり、「円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (点 $(0, 0)$ を除く)」である。

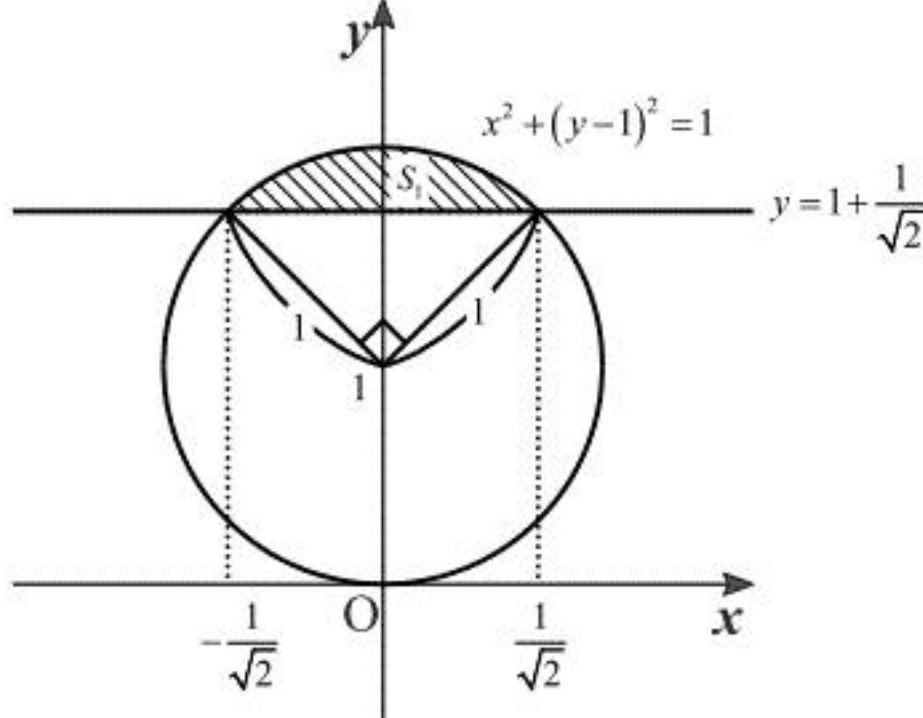
(答) 円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (点 $(0, 0)$ を除く)

(3)

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $y = \sqrt{2}x^2 + 1$ で囲まれた図形は下図斜線部である。



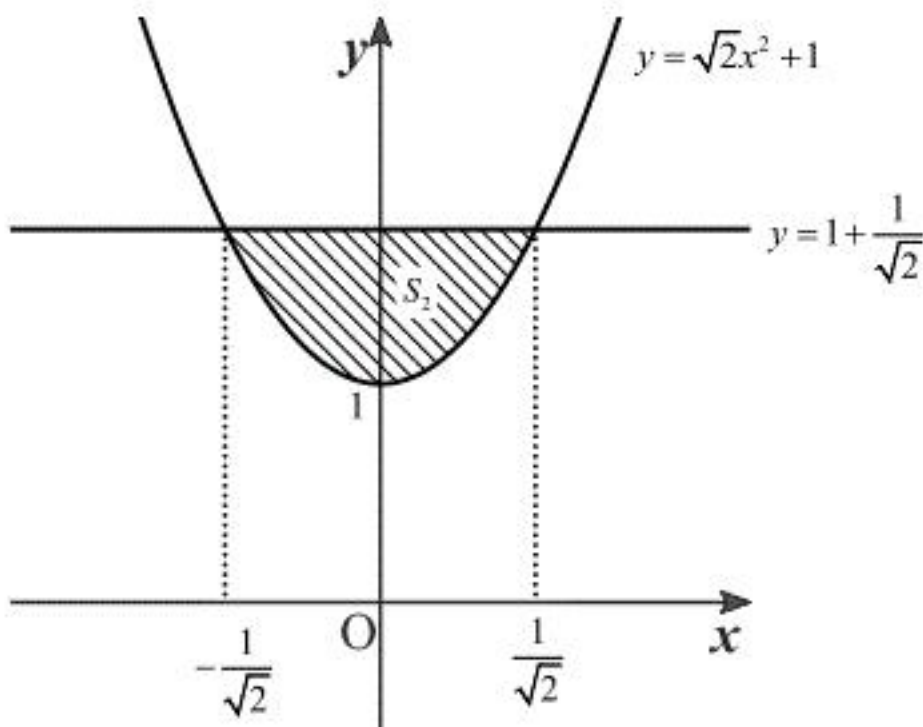
ここで、上図斜線部の面積を $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ で分けて考える。求める図形のうち $y \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分の面積を S_1 とすると、 S_1 は以下のようになる。



よって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、求める図形のうち $y \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分の面積を S_2 とすると、 S_2 は以下のようになる。



よって、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}x^2 + 1) \right\} dx \\ &= -\sqrt{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left\{ x - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x - ty = 0 \\ tx + y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = ty \\ (1+t^2)y = 2 \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{2}{1+t^2} \end{cases} \quad (\because 1+t^2 > 0) \end{aligned}$$

となる。