

I

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
㉔	㉔	㉔	㉔	㉔	㉔	㉔	㉔	㉔

[解説]

加法定理を用いて与式を変形すると

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^\pi tf(t)\cos(x+t)dt + \frac{1}{4} \\
 &= \int_0^\pi tf(t)(\cos x \cos t - \sin x \sin t)dt + \frac{1}{4} \\
 &= \cos x \int_0^\pi tf(t)\cos tdt - \sin x \int_0^\pi tf(t)\sin tdt + \frac{1}{4} \\
 &= A \times (\cos x) + B \times (-\sin x) + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi t \cos^2 tdt &= \int_0^\pi t \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi tdt + \frac{1}{2} \int_0^\pi t \left(\frac{1}{2} \sin 2t \right)' dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t \sin 2t \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2tdt \\
 &= \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \cos 2t \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{4} \pi^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi t \sin^2 tdt &= \int_0^\pi t(1 - \cos^2 t)dt \\
 &= \int_0^\pi tdt - \int_0^\pi t \cos^2 tdt \\
 &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \pi^2 \\
 &= \frac{1}{4} \pi^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi t \cos t \sin tdt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi t \sin 2tdt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi t \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right)' dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} t \cos 2t \right]_0^\pi + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2tdt \\
 &= -\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{4} \pi
 \end{aligned}$$

であるから、①に②を代入すると

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\pi tf(t)\cos tdt \\
 &= \int_0^\pi t \cos t \left(A \cos t - B \sin t + \frac{1}{4} \right) dt \\
 &= A \int_0^\pi t \cos^2 tdt - B \int_0^\pi t \cos t \sin tdt + \frac{1}{4} \int_0^\pi t \cos tdt \\
 &= \frac{1}{4} \pi^2 A + \frac{1}{4} \pi B - \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} \pi^2 - 1 \right) A + \frac{1}{4} \pi B - \frac{1}{2} &= 0 \\
 \therefore (-\pi^2 + 4) A - \pi B + 2 &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^\pi tf(t)\sin tdt \\
 &= \int_0^\pi t \sin t \left(A \cos t - B \sin t + \frac{1}{4} \right) dt \\
 &= A \int_0^\pi t \cos t \sin tdt - B \int_0^\pi t \sin^2 tdt + \frac{1}{4} \int_0^\pi t \sin tdt \\
 &= -\frac{1}{4} \pi A - \frac{1}{4} \pi^2 B + \frac{1}{4} \pi \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \pi A + \left(1 + \frac{1}{4} \pi^2 \right) B - \frac{1}{4} \pi &= 0 \\
 \therefore \pi A + (\pi^2 + 4) B - \pi &= 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

となる。③、④の連立方程式を解くと

$$A = \frac{\pi^2 + 8}{\pi^4 - \pi^2 - 16}, B = \frac{\pi(\pi^2 - 6)}{\pi^4 - \pi^2 - 16}$$

が得られ、したがって

$$f(x) = \frac{\pi^2 + 8}{\pi^4 - \pi^2 - 16} \cdot \cos x + \frac{\pi(\pi^2 - 6)}{\pi^4 - \pi^2 - 16} \cdot (-\sin x) + \frac{1}{4}$$

となる。

Ⅱ

[解答]

コ	サ	シ	ス	セ	ソ
㉔	㉔	㉔	㉔	㉔	㉔

[解説]



前提より、 $AD=CD$ であるから、 $\angle ACD=\angle CAD=7.5^\circ$ となり、また $\angle ADB$ は $\angle CAD$ の外角であるから、

$$\begin{aligned}\angle ADB &= \angle ACD + \angle CAD \\ &= 7.5^\circ + 7.5^\circ \\ &= 15^\circ\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\angle DAB &= 90^\circ - \angle ADB \\ &= 90^\circ - 15^\circ \\ &= 75^\circ\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}BD &= AB \tan \angle DAB \\ &= \tan 75^\circ \\ &= \tan (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

となり、また

$$\begin{aligned}CD &= AD \\ &= \sqrt{AB^2 + BD^2} \\ &= \sqrt{1^2 + (2 + \sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{1 + (7 + 4\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} \\ &= \sqrt{6} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\tan 7.5^\circ &= \frac{AB}{CD + DB} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。次に2直線 $y=3kx$ 、 $y=4kx$ と x 軸正の方向とのなす角をそれぞれ

α 、 β ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$ 、 $0^\circ < \beta < 90^\circ$) とおくと、

$$\tan \alpha = 3k, \tan \beta = 4k$$

となるから、そのなす角 θ について

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan (\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{4k - 3k}{1 + 3k \cdot 4k} \\ &= \frac{k}{1 + 12k^2}\end{aligned}$$

となる。ここで $\tan \theta$ の最大値を考えるが、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $\tan \theta > 0$ であるため、 $\tan \theta$ の最

大値を与える k と $\frac{1}{\tan \theta}$ の最小値を与える k は一致する。よって $\frac{1}{\tan \theta}$ の最小値とそのときの

k の値を求める。上記の式と $k > 0$ であることを踏まえると相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan \theta} &= \frac{1 + 12k^2}{k} \\ &= 12k + \frac{1}{k} \\ &\geq 2\sqrt{12k \cdot \frac{1}{k}} \left(\because 12k > 0, \frac{1}{k} > 0 \right) \\ &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。また等号成立は

$$\begin{aligned}12k &= \frac{1}{k} \\ \Leftrightarrow k^2 &= \frac{1}{12} \\ \therefore k &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\because k > 0 \right)\end{aligned}$$

のときであるから、 $\tan \theta$ は $k = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ をとる。またこのとき、

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) &> 2 + 1.4 + 1.7 + 2.4 = 7.5 \\ 4\sqrt{3} &< 4 \cdot 1.8 = 7.2\end{aligned}$$

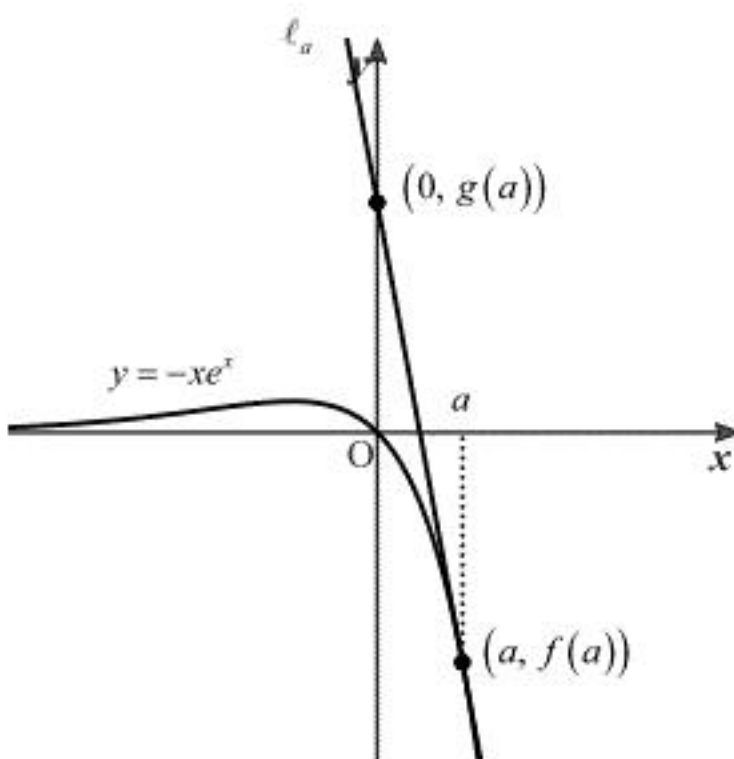
であり、 $y = \tan \theta$ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ において増加関数であることをふまえると

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) &> 4\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}} &< \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow \tan 7.5^\circ &< \tan \theta \\ \therefore \theta &> 7.5^\circ\end{aligned}$$

となる。

Ⅲ

(1)



与式より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^x - xe^x \\ &= -(1+x)e^x \end{aligned}$$

であるから、接点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ_a の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= -(a+1)e^a(x - a) - ae^a \\ \therefore y &= -(a+1)e^ax + a^2e^a \end{aligned}$$

である。また関数 $g(a)$ は接線 ℓ_a の y 切片であるから

$$g(a) = a^2e^a$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell_a: y = -(a+1)e^ax + a^2e^a, \quad g(a) = a^2e^a$$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned} g'(a) &= 2ae^a + a^2e^a \\ &= a(a+2)e^a \end{aligned}$$

であるから、 $g'(a) = 0$ となる a の値は $a = -2, 0$ である。よって増減表は以下のようになる。

a	...	-2	...	0	...
$g'(a)$	+	0	-	0	+
$g(a)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、 $y = g(a)$ の極大値は $a = -2$ のとき $\frac{4}{e^2}$ であるから、 $b = -2$ である。またこのとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(x+1)e^x \\ f''(x) &= -e^x - (x+1)e^x \\ &= -(x+2)e^x \end{aligned}$$

であり、 $x = -2$ のとき $f''(x) = 0$ を満たし、また $x < -2$ のとき $f''(x) > 0$ 、 $x > -2$ のとき $f''(x) < 0$ と、 $x = -2$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わっているため、 $x = -2$ が変曲点であり、 $b = -2$ の値とも一致する。

$$(\text{答}) \quad b = -2$$

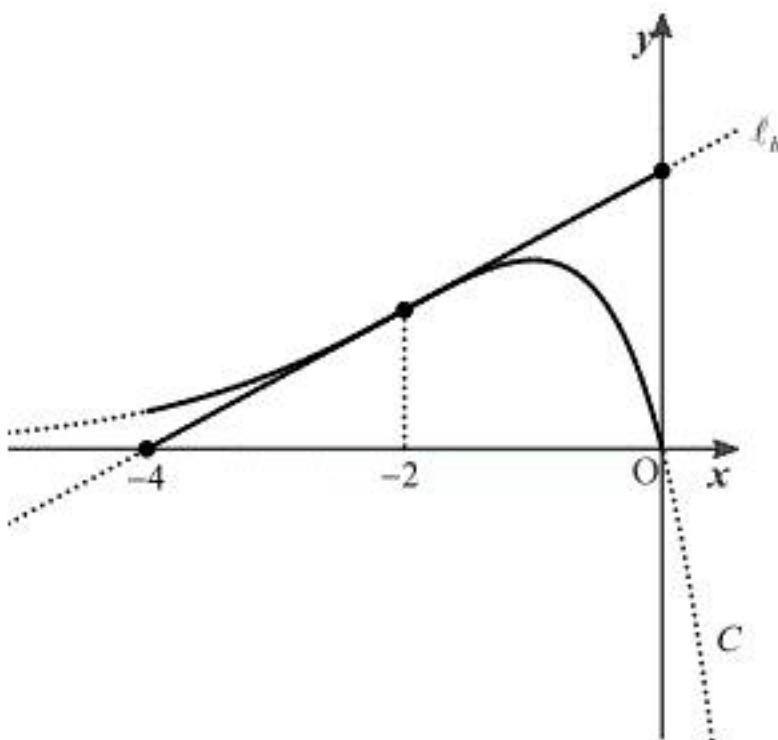
(証明終)

(3)

(1), (2)より、接線 ℓ_b の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -(-2+1)e^{-2}x + (-2)^2e^{-2} \\ &= \frac{x+4}{e^2} \end{aligned}$$

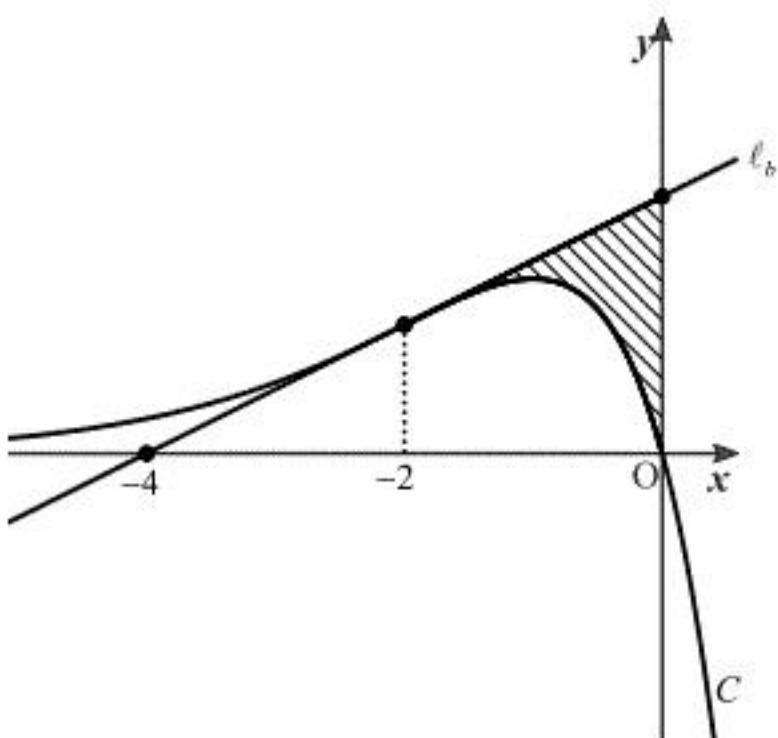
であり、またこの接線 ℓ_b と x 軸との交点の x 座標は $x = -4$ とわかる。よって $-4 \leq x \leq 0$ における曲線 C と接線 ℓ_b の概形は以下の実線部となる。



$$(\text{答}) \quad c = -4, \text{ 上図}$$

(4)

求める面積 S は以下の図の斜線部の面積である。



よってその面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \frac{x+4}{e^2} dx - \int_{-2}^0 (-xe^x) dx \\ &= \frac{1}{e^2} \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^0 + \int_{-2}^0 x(e^x)' dx \\ &= -\frac{1}{e^2}(2-8) + [xe^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 e^x dx \\ &= \frac{6}{e^2} + \frac{2}{e^2} - [e^x]_{-2}^0 \\ &= \frac{8}{e^2} - 1 + \frac{1}{e^2} \\ &= \frac{9}{e^2} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{9}{e^2} - 1$$

IV

(1)

与式において、

$$f(-1) = -1 + (1 - 2t) - (4 - 2t) + 4 = 0$$

であるから、因数定理より与式は $x + 1$ で割り切ることができる。よって与式は

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + (1 - 2t)x^2 + (4 - 2t)x + 4 \\ &= (x + 1)(x^2 - 2tx + 4) \end{aligned}$$

と因数分解できる。ここで $f(x) = 0$ が虚数解を持つには、 $x^2 - 2tx + 4 = 0$ が虚数解をもてばよいから、その式の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &< 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4 &< 0 \\ \Leftrightarrow (t + 2)(t - 2) &< 0 \\ \therefore -2 < t &< 2 \end{aligned}$$

が求める範囲となる。

$$\text{(答)} \quad f(x) = (x + 1)(x^2 - 2tx + 4), \quad -2 < t < 2$$

(2)

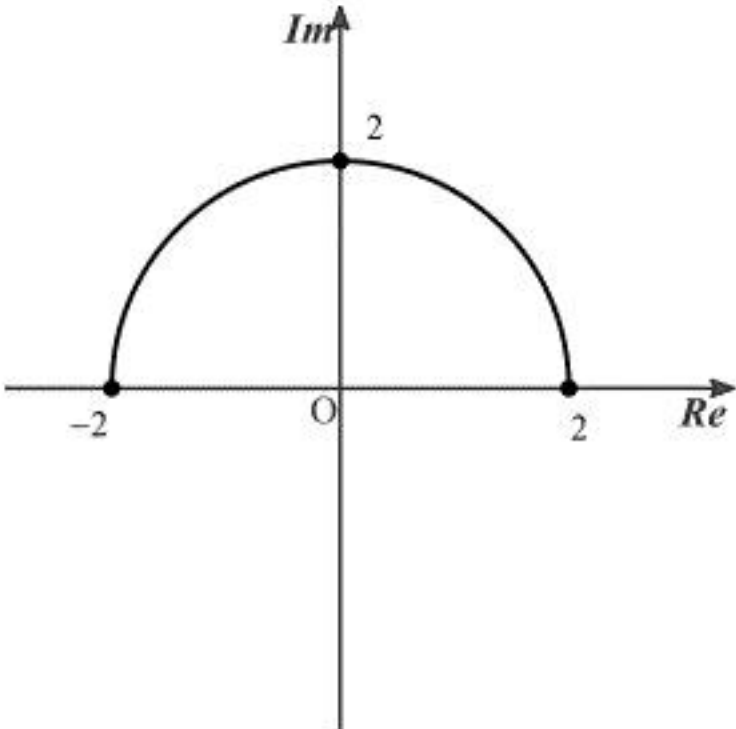
(1)より $\gamma = -1$ であり、また

$$\begin{aligned} x^2 - 2tx + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= t \pm \sqrt{t^2 - 4} \\ \Leftrightarrow \alpha &= t + \sqrt{4 - t^2}i, \quad \beta = t - \sqrt{4 - t^2}i \end{aligned}$$

である。よって $\alpha = x + yi$ (x, y は実数) において x, y の関係式を求めると

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4 - t^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{4 - x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= 4 - x^2 \quad (y > 0) \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= 4 \quad (y > 0) \end{aligned}$$

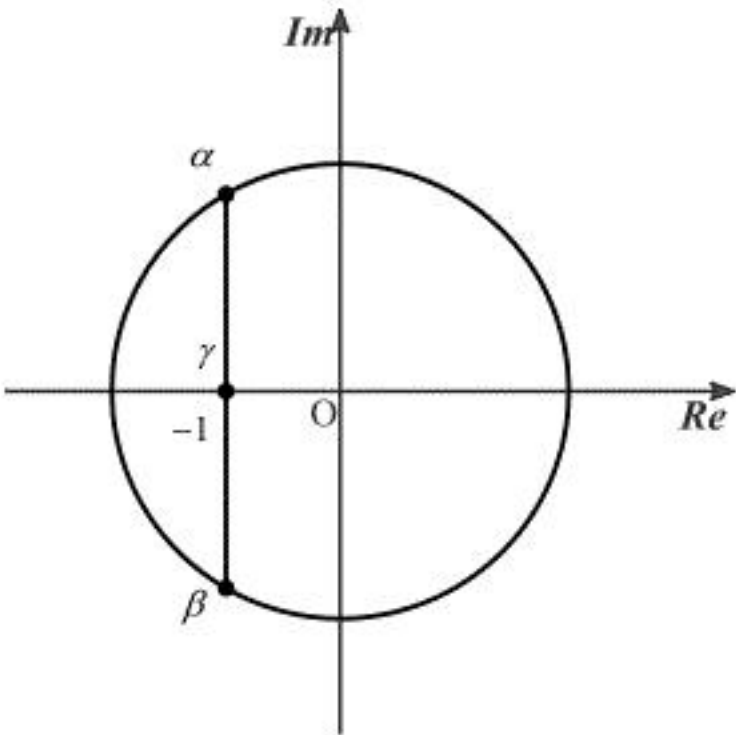
を得る。ここで、 $-2 < t < 2$ より $-2 < x < 2$ であるが $x^2 + y^2 = 4$ ($y > 0$) は $-2 < x < 2$ を満たす。よって、点 α は xy 平面において原点を中心とした半径 2 の円の $y > 0$ の部分を描く。これを複素数平面で表すと以下ようになる。



(答) 前図(端点を含まない)

(3)

(2)と同様にして、点 β は原点中心半径 2 の円の $y < 0$ の部分を描き、また α と β は共役な複素数であるから、互いに実軸を対称とした位置にある。また点 γ は $\gamma = -1$ であることから、3点 α, β, γ が一直線上にあるのは以下の図のようなときである。



よってそのときの t の値は $t = -1$ である。

(答) $t = -1$

(4)

α, β, γ に対応する点をそれぞれ点 A, B, C とおく。(3)より A, B は実軸対称であり、その実軸上に点 C があることから、 $\triangle ABC$ は $AC = BC$ の二等辺三角形である。よって $\triangle ABC$ が正三角形であるためには、 $AB = AC$ となればよい。したがって

$$\begin{aligned} AB &= AC \\ \Leftrightarrow AB^2 &= AC^2 \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{4 - t^2}\right)^2 &= (t + 1)^2 + \left(\sqrt{4 - t^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 4(4 - t^2) &= (t^2 + 2t + 1) + (4 - t^2) \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 11 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

となり、これは $-2 < t < 2$ を満たす。よって、 $t = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{4}$ のとき 3点 α, β, γ は正三角形の頂点となる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$