

2022 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 13:35～15:15 100 分)

1. 解答用紙は、記述解答用紙のみです。
2. 問題は、Ⅰ～Ⅳの4題あります。そのうち3題を選択して解答してください。選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を、選択しなかった問題には×を記入してください。(選択欄の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。)

なお、4題すべてに○を記入した場合は、数学の解答はすべて無効となります。

(記入例)

I	選 択	☐
---	-----	-----------------------

II	選 択	☐
----	-----	--------------------------

3. 解答は、必ず解答欄の枠内に記入してください。解答欄以外に記入した解答はすべて無効となります。特に、採点欄に解答を記入しないよう、注意してください。
4. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。
5. 解答用紙を折り曲げたり、切り離したり、汚したりしないでください。
6. 解答用紙には、受験番号と氏名を必ず記入してください。未記入や記入ミスがあった場合は、当該科目の解答は無効になります。
7. 満点が150点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が300点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I $\triangle ABC$ において, $AB = AC = 1$, $BC = 2t$ ($0 < t < 1$) とする。また, BC の中点を M とし, $\triangle ABC$ の外心を O , 内心を I とする。さらに, $\triangle ABC$ の面積を S , 外接円の半径を R , 内接円の半径を r とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) S, R, r をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) $0 < t < 1$ において r を最大にする t の値を求めよ。

(3) t を (2) で求めた値とすると, $\frac{OM}{IM}$ の値を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

II $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$) の番号を一つずつ書いた n 枚のカード 1 組ずつを A 君, B 君が持っている。A 君, B 君はそれぞれ自分の持っているカードの組からランダムに 2 枚抜き出す。A 君が抜き出した 2 枚のカードの番号の大きい方を a , B 君が抜き出した 2 枚のカードの番号の大きい方を b とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) $2 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対し, $a \leq k$ となる確率を p_k , $a = k$ となる確率を q_k とする。 p_k, q_k を求めよ。

(2) $a = b$ となる確率を r とする。 r を求めよ。

(3) $a < b$ となる確率を s とする。 s を求めよ。

(4) $|a - b| \leq 1$ となる確率を t とする。 t を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

III 自然数 a, b, c, d により

$$n = b^3 - a^3 = c^2 + d^2$$

と表されるような素数 n を調べる。例えば

$$37 = 4^3 - 3^3 = 1^2 + 6^2, \quad 397 = 12^3 - 11^3 = 6^2 + 19^2$$

などがある。以下の問いに答えよ。(50 点)

- (1) 2 つの自然数 c, d の平方の和 $k = c^2 + d^2$ が奇数であれば, k を 4 で割った余りは 1 である。このことを, c が偶数の場合と奇数の場合に分けて示せ。
- (2) 素数 ℓ が 2 つの自然数 a, b により $\ell = b^3 - a^3$ と表されるとき, 3 次式 $b^3 - a^3$ の因数分解を用いて $b = a + 1$ であることを示せ。
- (3) 素数 n が 4 つの自然数 a, b, c, d により $n = b^3 - a^3 = c^2 + d^2$ と表されるとき, b を 4 で割った余りは 0 か 1 であることを示せ。
- (4) 200 以下の素数 n で (3) の条件を満たすものが $n = 37$ 以外にも存在する。それらをすべて求めよ。また, そのときの a, b, c, d ($c \leq d$) も求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV n を 2 以上の整数とすると、以下の問いに答えよ。(50 点)

- (1) $x > 0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x) > 0$, $f(1) = 0$ を満たしている。このとき次の不等式を示せ。

$$(a) \quad \sum_{k=1}^n f(k) < \int_1^{n+1} f(x) dx$$

$$(b) \quad \int_1^n f(x) dx < \sum_{k=1}^n f(k)$$

- (2) (1) を利用して以下の不等式を示せ。

$$n \log n - n + 1 < \log n! < (n+1) \log(n+1) - n$$

- (3) $K_n = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ とする。このとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ を求めよ。なお、必要ならば、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \text{ を用いてよい。}$$

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

