

2022 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類があります。
2. 解答は、必ず解答欄の枠内に記入もしくはマークしてください。解答欄以外への記入およびマークはすべて無効となります。特に、記述解答用紙の採点欄に解答を記入しないよう、注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、一度マークした箇所を修正する場合、しっかりと消してください。消し残りがあると、解答が無効となることがあります。また、消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、切り離したり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入・マークしてください。未記入や記入・マークミスなどがあった場合は、当該科目の解答は無効になります。
6. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

- I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_0^{\pi} t f(t) \cos(x+t) dt + \frac{1}{4}$$

を満たしている。このとき、

$$A = \int_0^{\pi} t f(t) \cos t dt, \quad B = \int_0^{\pi} t f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

とおいて $f(x)$ を A と B で表すと、

$$f(x) = A \times \left(\boxed{\text{ア}} \right) + B \times \left(\boxed{\text{イ}} \right) + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、

$$\int_0^{\pi} t \cos t dt = -2, \quad \int_0^{\pi} t \cos^2 t dt = \boxed{\text{ウ}}, \quad \int_0^{\pi} t \sin t dt = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} t \sin^2 t dt = \boxed{\text{エ}}, \quad \int_0^{\pi} t \cos t \sin t dt = \boxed{\text{オ}}$$

を用い、①に②を代入して整理すると、 A と B の満たす連立方程式

$$\begin{cases} \left(\boxed{\text{カ}} \right) A - \pi B + 2 = 0 \\ \pi A + \left(\boxed{\text{キ}} \right) B - \pi = 0 \end{cases}$$

が得られる。この連立方程式を解くと

$$A = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\pi^4 - \pi^2 - 16}, \quad B = \frac{\pi \left(\boxed{\text{ケ}} \right)}{\pi^4 - \pi^2 - 16}$$

が得られ、したがって

$$f(x) = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\pi^4 - \pi^2 - 16} \times \left(\boxed{\text{ア}} \right) + \frac{\pi \left(\boxed{\text{ケ}} \right)}{\pi^4 - \pi^2 - 16} \times \left(\boxed{\text{イ}} \right) + \frac{1}{4}$$

となる。

問題 I のア, イの解答群

(a) $\sin x$

(b) $-\sin x$

(c) $\cos x$

(d) $-\cos x$

(e) $\tan x$

(f) $-\tan x$

問題 I のウ, エ, オの解答群

(a) π

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{8}$

(e) $-\pi$

(f) $-\frac{\pi}{2}$

(g) $-\frac{\pi}{4}$

(h) $-\frac{\pi}{8}$

(i) π^2

(j) $\frac{\pi^2}{2}$

(k) $\frac{\pi^2}{4}$

(l) $\frac{\pi^2}{8}$

(m) $-\pi^2$

(n) $-\frac{\pi^2}{2}$

(o) $-\frac{\pi^2}{4}$

(p) $-\frac{\pi^2}{8}$

(q) $\frac{\pi^2 + 4}{16}$

(r) $\frac{\pi^2 - 4}{16}$

(s) $\frac{-\pi^2 + 4}{16}$

(t) $\frac{-\pi^2 + 4}{16}$

問題 I のカ, キ, ク, ケの解答群

(a) $\pi^2 + 2$

(b) $\pi^2 - 2$

(c) $-\pi^2 + 2$

(d) $-\pi^2 - 2$

(e) $\pi^2 + 4$

(f) $\pi^2 - 4$

(g) $-\pi^2 + 4$

(h) $-\pi^2 - 4$

(i) $\pi^2 + 6$

(j) $\pi^2 - 6$

(k) $-\pi^2 + 6$

(l) $-\pi^2 - 6$

(m) $\pi^2 + 8$

(n) $\pi^2 - 8$

(o) $-\pi^2 + 8$

(p) $-\pi^2 - 8$

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

$AB = 1$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 7.5^\circ$ である $\triangle ABC$ の辺 BC 上に $AD = CD$ となるように点 D をとる。このとき, $BD = \boxed{\text{コ}}$, $CD = \boxed{\text{サ}}$ である。したがって,

$$\tan 7.5^\circ = \frac{1}{\boxed{\text{コ}} + \boxed{\text{サ}}}$$

である。

次に、正の実数 k に対して、2 直線 $y = 3kx$, $y = 4kx$ のなす角度を θ とする。ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ である。このとき, $\tan \theta = \boxed{\text{シ}}$ である。したがって, $\tan \theta$ は $k = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき最大値 $\frac{1}{\boxed{\text{セ}}}$ をとる。また, $k = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ をみたす。

なお、必要ならば,

$$\sqrt{2} = 1.4\cdots, \quad \sqrt{3} = 1.7\cdots, \quad \sqrt{5} = 2.2\cdots, \quad \sqrt{6} = 2.4\cdots$$

を用いてよい。

問題 II のコ, サの解答群

- (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (b) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ (c) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ (d) $2 + \sqrt{3}$
(e) $2 + \sqrt{5}$ (f) $2 + \sqrt{6}$ (g) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (h) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$

問題 II のシの解答群

- (a) $\frac{k}{1 - 12k^2}$ (b) $\frac{k}{1 + 12k^2}$ (c) $\frac{7k}{1 - 12k^2}$ (d) $\frac{7k}{1 + 12k^2}$
(e) $\frac{12k^2}{1 - 12k^2}$ (f) $\frac{12k^2}{1 + 12k^2}$ (g) $\frac{12k^2}{1 - 7k}$ (h) $\frac{12k^2}{1 + 7k}$

問題 II のス, セの解答群

- (a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 3 (d) $2\sqrt{3}$
(e) 4 (f) $3\sqrt{2}$ (g) $3\sqrt{3}$ (h) $4\sqrt{2}$
(i) 6 (j) $4\sqrt{3}$ (k) 7 (l) $7\sqrt{2}$

問題 II のソの解答群

- (a) $\theta > 7.5^\circ$ (b) $\theta = 7.5^\circ$ (c) $\theta < 7.5^\circ$

(設問は次のページにつづく)

III 関数 $f(x) = -xe^x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線を ℓ_a とし、接線 ℓ_a と y 軸の交点を $(0, g(a))$ とおく。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) 接線 ℓ_a の方程式と $g(a)$ を求めよ。

以下、 a の関数 $g(a)$ が極大値をとるときの a の値を b とおく。

(2) b を求め、点 $(b, f(b))$ は曲線 C の変曲点であることを示せ。

(3) 曲線 C の点 $(b, f(b))$ における接線 ℓ_b と x 軸の交点の x 座標 c を求めよ。さらに、 $c \leq x \leq 0$ の範囲で曲線 C の概形と接線 ℓ_b を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C 、接線 ℓ_b および y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV t を実数とし、 x の 3 次式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + (1 - 2t)x^2 + (4 - 2t)x + 4$$

により定める。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 3 次式 $f(x)$ を実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解し、 $f(x) = 0$ が虚数の解をもつような t の範囲を求めよ。

実数 t が (1) で求めた範囲にあるとき、方程式 $f(x) = 0$ の異なる 2 つの虚数解を α, β とし、実数解を γ とする。ただし、 α の虚部は正、 β の虚部は負とする。以下、 α, β, γ を複素数平面上の点とみなす。

- (2) α, β, γ を t を用いて表せ。また、実数 t が (1) で求めた範囲を動くとき、点 α が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

- (3) 3 点 α, β, γ が一直線上にあるような t の値を求めよ。

- (4) 3 点 α, β, γ が正三角形の頂点となるような t の値を求めよ。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

