I

〔解答〕

(1)	ア	イ						
	1	3						
(2)	ウ	エ						
	3	3						
(3)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
	1	5	1	5	2	1	5	4

〔解説〕

(1)

$\angle A=\theta$であるため，$0<\angle A<\pi$より，$0<\theta<\pi$である。また，$\angle B=2\theta$であるため，

$0<\angle B<\pi$より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$である。ここで，三角形の内角の和はπであるから，

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$$
$$\therefore \angle C=\pi-3\theta$$

である。$0<\angle C<\pi$であるから，

$$0<\pi-3\theta<\pi$$
$$\Leftrightarrow 0<\theta<\frac{1}{3}\pi$$

となる。以上より，求める値の範囲は$0<\theta<\dfrac{1}{3}\pi$である。

(2)

$\theta=\dfrac{1}{9}\pi$のとき，$\angle C=\dfrac{2}{3}\pi$である。正弦定理より，$\triangle ABC$の外接円の半径をRとおくと，

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle C}$$
$$=3\sqrt{3}$$

である。

(3)

$\angle A=\angle C$のとき，$\angle A+\angle B+\angle C=4\theta$であるため，

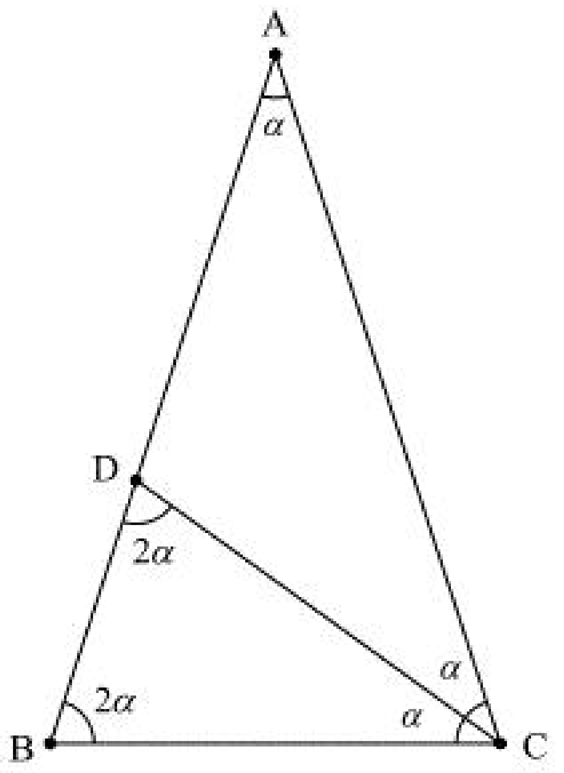
$$4\theta=\pi$$
$$\therefore \theta=\frac{1}{4}\pi$$

である。一方，$\angle B=\angle C$のとき，$\angle A+\angle B+\angle C=5\theta$であるため，

$$5\theta=\pi$$
$$\therefore \theta=\frac{1}{5}\pi$$

である。$\angle A<\angle B$であるため，$\triangle ABC$が二等辺三角形となるとき，$\theta=\dfrac{1}{5}\pi, \dfrac{1}{4}\pi$である。

$\dfrac{1}{5}\pi<\dfrac{1}{4}\pi$より，$\alpha=\dfrac{1}{5}\pi$である。$\theta=\alpha$のときの$\triangle ABC$を図示すると以下のようになる。



$\angle CDB=\angle B=2\alpha$であるから，$CD=BC$である。また，$\angle A=\angle DCA=\alpha$より，$AD=CD$である。したがって，$AD=BC$であり，$BD=AB-AD=AB-BC$となる。$\triangle ABC$と$\triangle CDB$が相似であることから，

$$AB:BC=CD:BD$$
$$\Leftrightarrow AB:BC=BC:(AB-BC)$$
$$\Leftrightarrow AB^2-AB\cdot BC-BC^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2-\frac{AB}{BC}-1=0\ (\because BC>0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

となる。$\dfrac{AB}{BC}>0$より，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$である。$\angle B=\angle C=2\alpha$より$AB=AC$であるから，余弦定理より，

$$\cos\alpha=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}$$
$$=\frac{2AB^2-BC^2}{2AB^2}$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{BC}{AB}\right)^2$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	1	1	0	2	1	5	0	1	1	4
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ					
	5	4	2	5	5					

〔解説〕

(1)(i)

袋から玉を2個取り出すとき，玉の取り出し方は全部で${}_5\mathrm{C}_2=10$(通り)あり，これらは同様に確からしい。したがって，$X=2$である確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{10}=\frac{1}{10}$$

である。

(ii)

$X+Y=2$のとき，$(X,Y)=(0,2),(1,1),(2,0)$である。$X=2,Y=0$である確率と$X=0,Y=2$である確率は，ともに

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{10}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{10}=\frac{3}{100}$$

である。また，$X=1,Y=1$である確率は，

$$\left(\frac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{10}\right)^2=\frac{9}{25}$$

である。したがって，$X+Y=2$である確率は

$$2\cdot\frac{3}{100}+\frac{9}{25}=\frac{21}{50}$$

となる。

(iii)

$X=2,Y=0$である確率は$\frac{3}{100}$であるから，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{3}{100}}{\frac{21}{50}}=\frac{1}{14}$$

である。

(2)(i)

サイコロでkの目が出たとき，袋の中には赤玉が2個，白玉が$k+3$個あるから，サイコロでkの目が出て，かつ取り出した玉が2個とも赤玉である確率は，

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_{k+5}\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{(k+5)(k+4)}$$

である。

(ii)

取り出した玉が2個とも赤玉である確率は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{(k+5)(k+4)}&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{11}\right)\\&=\frac{2}{55}\end{aligned}$$

である。

Ⅲ

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ			
	1	6	3			
(2)	エ	オ	カ			
	1	6	3			
(3)	キ	ク	ケ	コ	サ	
	6	3	6	1	4	
(4)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	3	4	1	2	3	4

〔解説〕

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{1}{6}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\end{aligned}$$

である。

(2)

$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ のとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$$

である。また，$\angle\mathrm{DOE}=90^\circ$ のとき，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{6}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left\{-\frac{1}{6}\left(3\vec{a}-5\vec{b}\right)\right\}=0\\
\Leftrightarrow\ &9\left|\vec{a}\right|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}-5\left|\vec{b}\right|^2=0\\
\Leftrightarrow\ &9\left|\vec{a}\right|^2-6\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|-5\left|\vec{b}\right|^2=0\\
\Leftrightarrow\ &9\left(\frac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}\right)^2-6\frac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}-5=0\ \left(\because\left|\vec{b}\right|>0\right)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{1\pm\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

を得る。$\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}>0$ より，$\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{\left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{1+\sqrt{6}}{3}$ である。

(3)

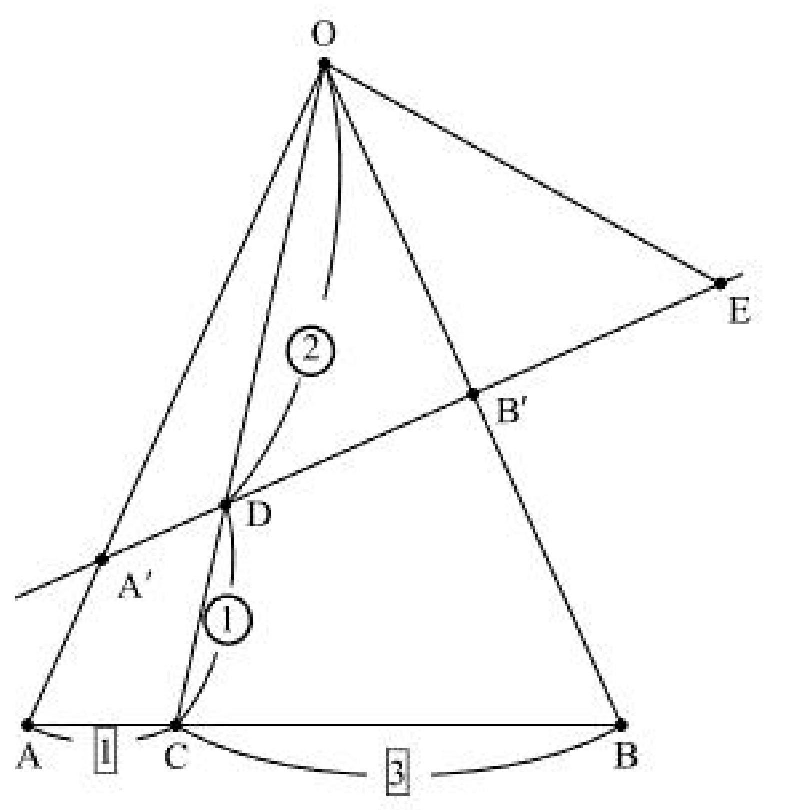
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{6}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\\&=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DE}}\\&=\frac{1}{6}\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)+t\left(-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\\&=\frac{1}{6}\left\{(3-6t)\vec{a}+(1+4t)\vec{b}\right\}\end{aligned}$$

である。

(4)



2 点 A′, B′ は直線 DE 上にあるため，(3)より，実数 t_{A}, t_{B} を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\frac{1}{6}\left\{\left(3-6t_{\mathrm{A}}\right)\vec{a}+\left(1+4t_{\mathrm{A}}\right)\vec{b}\right\},\ \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{1}{6}\left\{\left(3-6t_{\mathrm{B}}\right)\vec{a}+\left(1+4t_{\mathrm{B}}\right)\vec{b}\right\}$$

と表される。また，点 A′ は直線 OA 上の点であるから，$1+4t_{\mathrm{A}}=0$ となる。よって，$t_{\mathrm{A}}=-\dfrac{1}{4}$ であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$ である。さらに，点 B′ は直線 OB 上の点であるから，$3-6t_{\mathrm{B}}=0$ となる。よって，$t_{\mathrm{B}}=\dfrac{1}{2}$ であるため，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$ である。ゆえに，

$$\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OA}}=\frac{\left|\frac{3}{4}\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\mathrm{OB'}}{\mathrm{OB}}=\frac{\left|\frac{1}{2}\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{1}{2}$$

であり，

$$S_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}S_1=\frac{3}{8}S_1$$

となる。また，4 点 D, E, A′, B′ は同一直線上にあり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\\&=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\\&=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\end{aligned}$$

より，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{A'B'}}=\dfrac{4}{3}$ であるから，

$$\begin{aligned}S_3&=\frac{4}{3}S_2\\&=\frac{1}{2}S_1\end{aligned}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned}S_1:S_2:S_3&=S_1:\frac{3}{8}S_1:\frac{1}{2}S_1\\&=8:3:4\end{aligned}$$

である。

Ⅳ

〔解答〕

(1)	ア					
	0					
(2)	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	−	4	7	1	2	7
(3)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
	−	3	−	2	7	7

〔解説〕

(1)

$$f'(x)=3x^2-3a^2$$
$$=3(x-a)(x+a)$$

である。$f'(x)$は2次式であるため，3次関数$f(x)$に極値が存在しないのは，$f'(x)=0$の判別式Dについて，$D\leqq 0$が成り立つときである。

$$D=36a^2$$

であるから，$D\leqq 0$が成り立つのは，$a^2\leqq 0$，すなわち$a=0$のときである。

(2)

$f(x)$が極値をもつことから，$a\neq 0$である。$f'(x)=0$の解は$x=\pm a$であるから，$x=\pm a$のとき$f(x)$は極値をとる。

[1] $a>0$のとき

x^3の係数が正であることから，$f(x)$は$x=-a$のとき極大値$f(-a)=-3a^3$をとるため，

$$-3a^3=4$$
$$\therefore a^3=-\frac{4}{3}$$

である。しかし，これは$a>0$に矛盾するから不適である。

[2] $a<0$のとき

$f(x)$は$x=a$のとき極大値$f(a)=-7a^3$をとるため，

$$-7a^3=4$$
$$\therefore a^3=-\frac{4}{7}$$

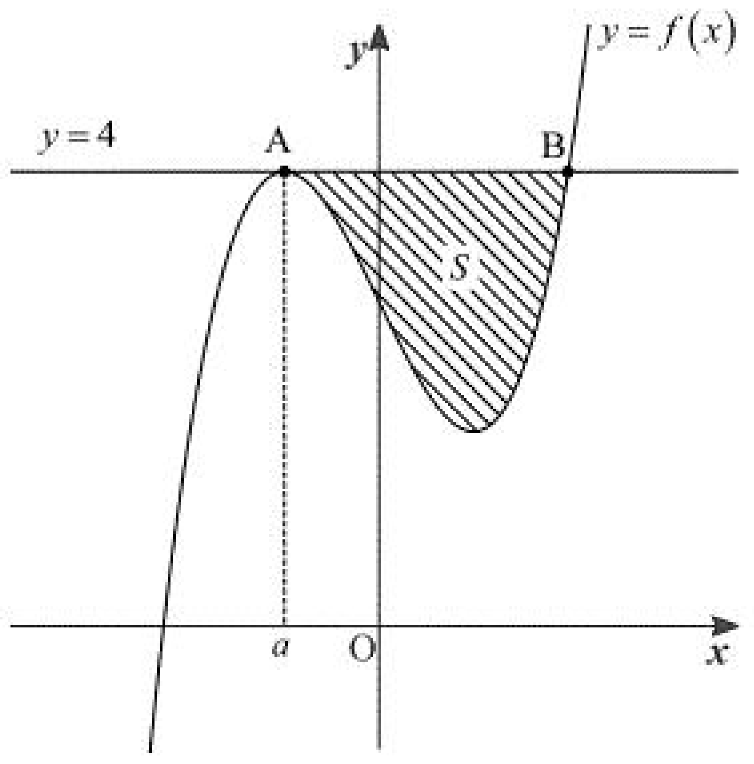
である。これは$a<0$を満たす。

以上，[1], [2]より，$a^3=-\frac{4}{7}$である。このとき，$f(x)$は$x=-a$で極小値をとり，

$$f(-a)=-3a^3$$
$$=\frac{12}{7}$$

である。

(3)



Aのx座標よりBのx座標の方が大きいとすると，Aのx座標はaである。また，

$$\begin{cases} y=x^3-3a^2x-5a^3 \\ y=4 \end{cases}$$

よりyを消去して，

$$x^3-3a^2x-5a^3=4$$
$$\Leftrightarrow x^3-3a^2x-5a^3=-7a^3 \quad \left(\because a^3=-\frac{4}{7}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^3-3a^2x+2a^3=0$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a)=0$$
$$\therefore x=a,\ -2a$$

となるから，Bのx座標は$-2a$である。ゆえに，

$$\frac{\mathrm{AB}}{a}=\frac{-2a-a}{a}$$
$$=-3$$

である。また，

$$\frac{S}{a}=\frac{1}{a}\int_a^{-2a}\{4-f(x)\}dx$$
$$=-\frac{1}{a}\int_a^{-2a}(x^3-3a^2x+2a^3)dx$$
$$=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}a^2x^2+2a^3x\right]_a^{-2a}$$
$$=-\frac{1}{a}\left\{(4a^4-6a^4-4a^4)-\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{3}{2}a^4+2a^4\right)\right\}$$
$$=\frac{27}{4}a^3$$
$$=-\frac{27}{7}$$

となる。