I

(1)

点(a, b)は直線$y=x-2$上にあるため，

$$b=a-2$$

が成り立つ。よって，直線ℓの方程式は

$$\begin{aligned} y &= ax-(a-2) \\ &= a(x-1)+2 \end{aligned}$$

となる。この方程式は，定点$(1, 2)$を通る傾きaの直線を表すため，ℓは定数aの値によらず定点$(1, 2)$を通る。

(答) $(1, 2)$

(2)

直線ℓと放物線Cの式からyを消去すると，

$$x^2=ax-(a-2)$$
$$\Leftrightarrow x^2-ax+a-2=0$$

となり，α, βはこの方程式の2解である。よって，解と係数の関係より，α, βは

$$\begin{cases} \alpha+\beta=a \\ \alpha\beta=a-2 \end{cases}$$

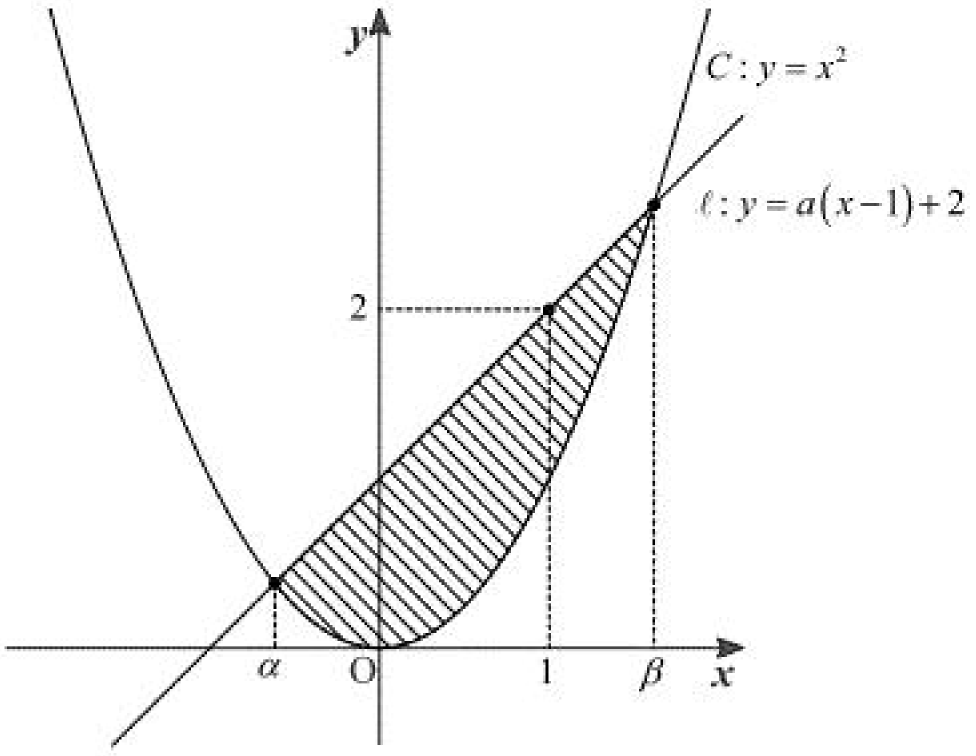
を満たす。ゆえに，

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= a^2-4(a-2) \\ &= a^2-4a+8 \end{aligned}$$

となる。$a^2-4a+8=(a-2)^2+4>0$であり，$\alpha<\beta$であることから，

$$\beta-\alpha=\sqrt{a^2-4a+8}$$

である。また，ℓは定点$(1, 2)$を通ることから，ℓとCを図示すると以下のようになる。



したがって，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{(ax-a+2)-x^2\right\}dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}\left(a^2-4a+8\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\beta-\alpha=\sqrt{a^2-4a+8},\ S=\frac{1}{6}\left(a^2-4a+8\right)^{\frac{3}{2}}$

(3)

Sが最小となるのは，a^2-4a+8が最小となるときである。

$$a^2-4a+8=(a-2)^2+4$$

であるため，$a=2$のときa^2-4a+8は最小値4をとる。このとき，ℓの方程式は$y=2x$であり，Sは最小値$\frac{1}{6}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$をとる。

(答) $\ell: y=2x,\ S=\frac{4}{3}$

Ⅱ

(1)

x の方程式 $x^2+x+1=0$ の解は,

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

である。$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき,

$$\omega^2=\frac{1-3-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

であるため，ω^2 は $x^2+x+1=0$ のもう一つの解であり，かつ $\omega^2=\overline{\omega}$ である。また,

$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき,

$$\omega^2=\frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

であるため，ω^2 は $x^2+x+1=0$ のもう一つの解であり，かつ $\omega^2=\overline{\omega}$ である。したがって,
$x^2+x+1=0$ の解の一つを ω と表すとき，ω^2 はもう一つの解であり，$\omega^2=\overline{\omega}$ である。

(証明終)

(2)

x^3 を x^2+x+1 で割ると,

$$x^3=(x-1)(x^2+x+1)+1$$

である。したがって，x^3-1 は x^2+x+1 で割り切れるため $x^3\equiv 1$ であり，$P(x)=1$ である。

(答) $P(x)=1$

(3)

整式 $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ が $P(x)\equiv R(x)$ かつ $Q(x)\equiv S(x)$ を満たすとするとき，整式 $T(x), U(x)$ を用いて,

$$P(x)-R(x)=T(x)(x^2+x+1)$$
$$Q(x)-S(x)=U(x)(x^2+x+1)$$

と表せる。このとき,

$$\begin{aligned}P(x)Q(x)-R(x)S(x)&=P(x)\{Q(x)-S(x)\}+S(x)\{P(x)-R(x)\}\\&=P(x)U(x)(x^2+x+1)+S(x)T(x)(x^2+x+1)\\&=\{P(x)U(x)+S(x)T(x)\}(x^2+x+1)\end{aligned}$$

となる。したがって，$P(x)Q(x)-R(x)S(x)$ が x^2+x+1 で割り切れるため,

$$P(x)Q(x)\equiv R(x)S(x)$$

が成り立つ。

(証明終)

(4)

$x^3\equiv 1$ であり, (3)の結果より，k を 0 以上の整数とするとき,

$$x^{3k}\equiv 1$$

となる。ゆえに、$n=3k, 3k+1, 3k+2$ の 3 つの場合を考える。

[1] $n=3k$ のとき

$x^{3k}\equiv 1$ となるから，$x^n\equiv P(x)$ となる次数最小の整式 $P(x)$ は

$$P(x)=1$$

である。

[2] $n=3k+1$ のとき

$x^{3k}\cdot x\equiv x$ となるから，$x^n\equiv P(x)$ となる次数最小の整式 $P(x)$ は

$$P(x)=x$$

である。

[3] $n=3k+2$ のとき

$x^{3k}\cdot x^2\equiv x^2$ となる。ここで，x^2 を x^2+x+1 で割ると,

$$x^2=1\cdot(x^2+x+1)-x-1$$

となる。ゆえに，$x^2\equiv -x-1$ であるから，$x^n\equiv P(x)$ となる次数最小の整式 $P(x)$ は

$$P(x)=-x-1$$

である。

以上, [1], [2], [3]より，$x^n\equiv P(x)$ となる次数最小の整式 $P(x)$ は

$$P(x)=\begin{cases}1 & (n\text{ を 3 で割った余りが 0 のとき})\\ x & (n\text{ を 3 で割った余りが 1 のとき})\\ -x-1 & (n\text{ を 3 で割った余りが 2 のとき})\end{cases}$$

となる。

(答) 前式

III

(1)

$m+n$ 個の玉が入った袋から 2 個の玉を取り出すときの取り出し方は ${}_{m+n}\mathrm{C}_2$ 通りであり，これらは同様に確からしい。取り出した 2 個が 2 個とも赤玉である確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{m+n}\mathrm{C}_2}=\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$$

である。

(答) $\dfrac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$

(2)

$m=3$ のとき，取り出した 2 個が 2 個とも赤玉である確率は, (1)より

$$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$$

である。よって，この確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるとき，$(n+3)(n+2)>0$ より

$$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)} \geqq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n^2-2n \geqq n^2+5n+6$$

$$\Leftrightarrow n^2-7n-6 \geqq 0$$

$$\therefore n \geqq \frac{7+\sqrt{73}}{2} \quad (\because n \geqq 2)$$

である。ここで，$8^2<73<9^2$ より，$8<\sqrt{73}<9$ である。ゆえに,

$$\frac{15}{2}<\frac{7+\sqrt{73}}{2}<8$$

が成り立つから，求める最小の n は

$$n=8$$

である。

(答) $n=8$

(3)

$n=m+3$ のとき，取り出した 2 個が 2 個とも赤玉である確率は, (1)より

$$\frac{(m+3)(m+2)}{(2m+3)(2m+2)}$$

である。よって，この確率が $\dfrac{1}{3}$ 以上となるとき，$(2m+2)(2m+3)>0$ より

$$\frac{(m+3)(m+2)}{(2m+3)(2m+2)} \geqq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3m^2+15m+18 \geqq 4m^2+10m+6$$

$$\Leftrightarrow m^2-5m-12 \leqq 0$$

$$\therefore 2 \leqq m \leqq \frac{5+\sqrt{73}}{2} \quad (\because m \geqq 2)$$

である。$8<\sqrt{73}<9$ であるため,

$$\frac{13}{2}<\frac{5+\sqrt{73}}{2}<7$$

が成り立つから，求める最大の m は

$$m=6$$

である。

(答) $m=6$