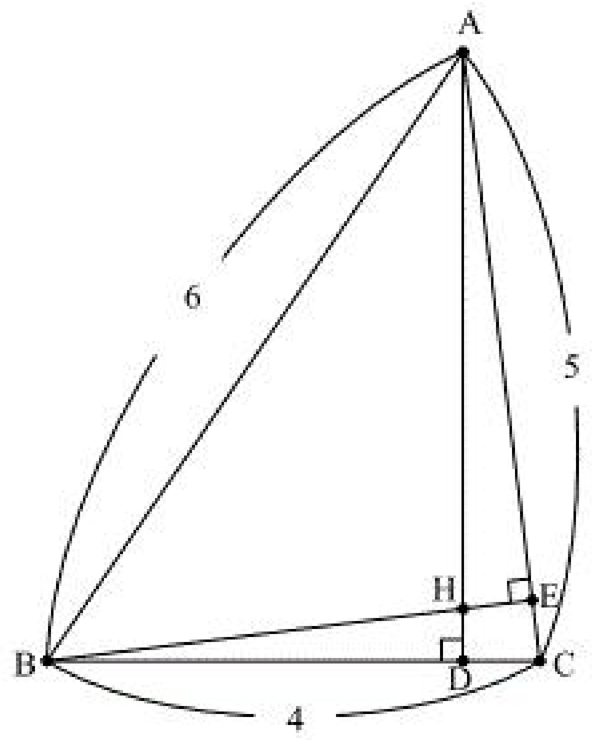
I

(1)

$\triangle$ABCおよびD, E, Hを図示すると下図のようになる。



$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\ \overrightarrow{DA}\neq 0,\ \overrightarrow{BC}\neq 0,\ \overrightarrow{EB}\neq 0,\ \overrightarrow{AC}\neq 0$ で，点D, Eはそれぞれ辺BC, AC上にあるから $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{EB}\perp\overrightarrow{AC}$ である。よって $\angle ADB=\angle AEB=90^\circ$ であるから，$\triangle$ABE，$\triangle$BCEにおいて三平方の定理より

$$\begin{cases} BE^2 = AB^2 - AE^2 \\ BE^2 = BC^2 - CE^2 \end{cases}$$

が成り立つ。また，CE = AC − AEである。したがって，BC = 4, AC = 5, AB = 6 より

$$AB^2 - AE^2 = BC^2 - (AC - AE)^2$$

$$\therefore AE = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AC} = \frac{9}{2}$$

である。

(答) $\dfrac{9}{2}$

(2)

$\angle AEB = 90^\circ$ であり，(1)の結果から $AE=\dfrac{9}{2}$ であるため

$$\cos\angle BAC = \frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$$

である。したがって，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC = \frac{45}{2}$$

となる。

(答) $\dfrac{45}{2}$

(3)

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

とおける。Hは線分ADと線分BEの交点であり，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\ \overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ であるから

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0 \\ \left(s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{45}{2}-36\right)s+\left(25-\dfrac{45}{2}\right)t=0 \\ \dfrac{45}{2}s+25t-\dfrac{45}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{27}{2}s+\dfrac{5}{2}t=0 \\ \dfrac{45}{2}s+25t=\dfrac{45}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s=\dfrac{1}{7} \\ t=\dfrac{27}{35} \end{cases}$$

となる。よって，

$$\left|\overrightarrow{AH}\right|^2 = \left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{27}{35}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{27}{35}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{49}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{27}{35}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \left(\frac{27}{35}\right)^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$= \frac{144}{7}$$

である。AH > 0 より，

$$AH = \frac{12\sqrt{7}}{7}$$

である。

(答) $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$

Ⅱ

$\dfrac{42}{8-\left|n^2-3\right|}$ が正の整数となるとき，

$$8-\left|n^2-3\right|>0$$
$$\Leftrightarrow -8<n^2-3<8$$
$$\Leftrightarrow -5<n^2<11$$

となるから，$n=1,\ 2,\ 3$ であることが必要である。$\dfrac{42}{8-\left|n^2-3\right|}$ に $n=1,\ 2,\ 3$ を代入すると，それぞれ

$$\frac{42}{8-\left|1^2-3\right|}=7$$
$$\frac{42}{8-\left|2^2-3\right|}=6$$
$$\frac{42}{8-\left|3^2-3\right|}=21$$

となり，これらは正の整数である。したがって，$\dfrac{42}{8-\left|n^2-3\right|}$ が正の整数となるような正の整数 n は $n=1,\ 2,\ 3$ である。

(答)　$n=1,\ 2,\ 3$

III

(1)

$f(x)=x^3-5x,\ g(x)=x^2+a$ とおくと，$f'(x)=3x^2-5,\ g'(x)=2x$ である。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点のうち，接線が共通である点の x 座標を p (p は実数)とおくと，

$$\begin{cases} p^3-5p=p^2+a & \cdots ① \\ 3p^2-5=2p & \cdots ② \end{cases}$$

を満たす。このとき，②式より，

$$3p^2-2p-5=0$$
$$\Leftrightarrow (3p-5)(p+1)=0$$
$$\therefore p=\frac{5}{3},\ -1$$

である。したがって，①式より，$p=\dfrac{5}{3}$ のとき $a=-\dfrac{175}{27}$ であり，$p=-1$ のとき $a=3$ である。

(答) $a=-\dfrac{175}{27},\ 3$

(2)

$y=g(x)$ 上の $(p,\ g(p))$ における接線の方程式は，

$$y=g'(p)(x-p)+g(p)$$
$$\Leftrightarrow y=2px-p^2+a$$

である。したがって，$a=-\dfrac{175}{27},\ p=\dfrac{5}{3}$ のとき，共通の接線の方程式は

$$y=\frac{10}{3}x-\frac{250}{27}$$

であり，$a=3,\ p=-1$ のとき，共通の接線の方程式は

$$y=-2x+2$$

である。

(答) $a=-\dfrac{175}{27}$ のとき $y=\dfrac{10}{3}x-\dfrac{250}{27}$，$a=3$ のとき $y=-2x+2$

Ⅳ

(1)

二項定理より，実数 a, b について

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$$

が成り立つ。この式に $a=b=1$ を代入すると，

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$$
$$\Leftrightarrow {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots{}_n\mathrm{C}_n=2^n$$

を得る。

(答) 2^n

(2)

$${}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\ {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{n-1-(k-1)\}!}$$

と表せる。したがって，

$$\begin{aligned}k\times{}_n\mathrm{C}_k&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\\&=n\times\frac{(n-1)!}{(k-1)!\{n-1-(k-1)\}!}\\&=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

(2)の結果より，

$$\begin{aligned}1\times{}_n\mathrm{C}_1+2\times{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+n\times{}_n\mathrm{C}_n&=\sum_{k=1}^{n}(k\times{}_n\mathrm{C}_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})\\&=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k\end{aligned}$$

と変形できる。$\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k$ は(1)において n を $n-1$ とした場合に等しく，

$$\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k=2^{n-1}$$

である。したがって，

$$1\times{}_n\mathrm{C}_1+2\times{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+n\times{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}n$$

である。

(答) $2^{n-1}n$