I

(1)

C_1は中心$(0,0)$，半径$\sqrt{3}$の円である。また，

$$x^2+y^2-2x-6y+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=9$$

と変形できるため，C_2は中心$(1,3)$，半径3の円である。C_1, C_2の中心間の距離dは

$$d=\sqrt{1^2+3^2}$$
$$=\sqrt{10}$$

であり，$3<\sqrt{10}<4$より$3-\sqrt{3}<d<3+\sqrt{3}$となるから，C_1とC_2は2点で交わる。

(証明終)

また，2つの交点を通る円(C_2を除く)の方程式は，実数$k\ (\neq -1)$を用いて

$$x^2+y^2-3+k\left(x^2+y^2-2x-6y+1\right)=0 \qquad \cdots ①$$

と表される。$k=-1$のとき，①式の表す図形は2つの交点を通る直線であり，その方程式は，

$$2x+6y-4=0$$
$$\therefore x+3y-2=0$$

となる。

(答) $x+3y-2=0$

(2)

$x=y=0$のとき円C_2の方程式は成り立たないから，円C_2は原点を通らない。$k\neq -1$とすると，①式の表す円が原点を通るとき，①式に$x=0,\ y=0$を代入して，

$$-3+k=0$$
$$\therefore k=3$$

である。したがって，この円の方程式は，

$$x^2+y^2-3+3\left(x^2+y^2-2x-6y+1\right)=0$$
$$\therefore x^2+y^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}y=0$$

である。

(答) $x^2+y^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}y=0$

(3)

$k\neq -1$のとき，

$$① \Leftrightarrow (k+1)x^2+(k+1)y^2-2kx-6ky-3+k=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{k}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{3k}{k+1}\right)^2=\frac{9k^2+2k+3}{(k+1)^2}$$

と変形できる。$9k^2+2k+3=9\left(k+\frac{1}{9}\right)^2+\frac{26}{9}>0$より，①式が表す図形は中心$\left(\frac{k}{k+1}, \frac{3k}{k+1}\right)$，

半径$\frac{\sqrt{9k^2+2k+3}}{|k+1|}$の円である。この円が$x$軸に接するのは，

$$\left|\frac{3k}{k+1}\right|=\frac{\sqrt{9k^2+2k+3}}{|k+1|} \qquad \cdots ②$$

を満たすときである。両辺ともに正であるから，

$$② \Leftrightarrow 9k^2=9k^2+2k+3$$
$$\therefore k=-\frac{3}{2}$$

である。したがって，$k=-\frac{3}{2}$のとき，①式は求める円を表し，その方程式は

$$x^2+y^2-6x-18y+9=0$$

である。

(答) $x^2+y^2-6x-18y+9=0$

Ⅱ

(1)

$$a_1=\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)$$
$$=4$$

$$a_2=\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\left(7+4\sqrt{3}\right)+\left(7-4\sqrt{3}\right)$$
$$=14$$

である。また，

$$a_{n+2}+a_n-4a_{n+1}=\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1-4\left(2+\sqrt{3}\right)\right\}\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left\{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1-4\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$
$$=0\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^n+0\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$
$$=0$$

となるため，

$$a_{n+2}+a_n=4a_{n+1}$$

が成り立つ。

(証明終)

(答) $a_1=4,\ a_2=14$

(2)

数学的帰納法を利用して，任意の自然数 n に対して $a_{n+1}+a_n$ が 3 の倍数となることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_2+a_1=18$$

であり，a_2+a_1 は 3 の倍数である。

[2] $n=k$ (k は自然数)のとき

$a_{k+1}+a_k$ が 3 の倍数であると仮定する。$n=k+1$ のとき，(1)より

$$a_{k+2}+a_{k+1}=\left(4a_{k+1}-a_k\right)+a_{k+1}$$
$$=5a_{k+1}-a_k$$
$$=6a_{k+1}-\left(a_{k+1}+a_k\right)$$

と変形できて，仮定より $a_{k+1}+a_k$ は 3 の倍数である。また，a_{k+1} は整数であるため，$6a_{k+1}$ も 3 の倍数である。したがって，$a_{k+2}+a_{k+1}$ は 3 の倍数となる。

以上, [1], [2]より，任意の自然数 n に対して $a_{n+1}+a_n$ が 3 の倍数となる。

(証明終)

(3)

$a_{n+1}+a_n,\ a_{n+2}+a_{n+1}$ はともに 3 の倍数であるため，

$$\left(a_{n+2}+a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}+a_n\right)=a_{n+2}-a_n$$

は 3 の倍数である。したがって，a_{n+2} と a_n をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致する。以下，同様に $a_{n+2},\ a_n,\ a_{n-2},\ a_{n-4},\ \cdots$ を 3 で割ったときの余りは全て一致する。

$$2023=2\cdot1011+1$$

であるため，a_{2023} と a_1 をそれぞれ 3 で割ったときの余りは一致し，$a_1=4$ よりその値は 1 である。

(答) 1

III

(1)

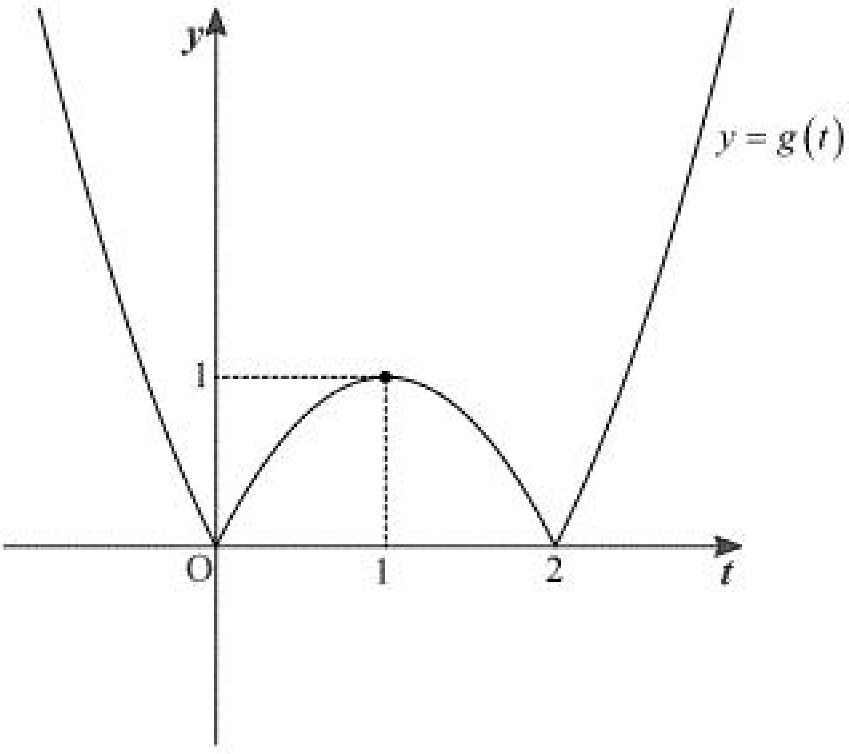
$t(t-2) \geqq 0$，すなわち $t \leqq 0$，$2 \leqq t$ のとき，

$$\begin{aligned} g(t) &= t(t-2) \\ &= (t-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

である。$t(t-2) \leqq 0$，すなわち $0 \leqq t \leqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} g(t) &= -t(t-2) \\ &= -(t-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

である。したがって，$y = g(t)$ のグラフを図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^3 |t(t-2)|\,dt \\ &= \int_0^2 \{-t(t-2)\}\,dt + \int_2^3 t(t-2)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_2^3 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $f(2) = \dfrac{8}{3}$

(3)

$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，

$$|t(t-x)| = \begin{cases} t(t-x) & (t \leqq 0\,,\ x \leqq t) \\ -t(t-x) & (0 \leqq t \leqq x) \end{cases}$$

となる。したがって，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^3 |t(t-x)|\,dt \\ &= \int_0^x \{-t(t-x)\}\,dt + \int_x^3 t(t-x)\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{x}{2}t^2\right]_0^x + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{x}{2}t^2\right]_x^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x + 9 \end{aligned}$$

である。

(答) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{9}{2}x + 9$