I

〔解答〕

(1)	6 個	(2)	144 通り
(3)	$-\sqrt{5}$	(4)	$x=10$
(5)	$a=3,\ r=-2$	(6)	$f(x)=20x+10$

〔解説〕

(1)

$$2023=7\cdot 17^2$$

であるから，2023 の正の約数の個数は

$$(1+1)(2+1)=6\ (\text{個})$$

である。

(2)

奇数のカードは 1, 3, 5 の 3 枚であるから，両端の奇数のカードの並べ方は

$${}_3\mathrm{P}_2=6\ (\text{通り})$$

あり，このそれぞれに対して間の 4 つのカードの並べ方は

$$4!=24\ (\text{通り})$$

ある。よって求める並べ方は

$$6\cdot 24=144\ (\text{通り})$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} y&=\cos x-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\\ &=\cos x-\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &=2\cos x-\sin x\\ &=\sqrt{5}\cos(x+\alpha) \end{aligned}$$

となる。ただし，α は $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす実数とする。

$0\leqq x<2\pi$ であるから，$\alpha\leqq x+\alpha<2\pi+\alpha$ であり，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より，$2\pi<2\pi+\alpha<\frac{5}{2}\pi$ であるため，$y=\sqrt{5}\cos(x+\alpha)$ は

$$x+\alpha=\pi \Leftrightarrow x=\pi-\alpha$$

のとき最小値 $-\sqrt{5}$ をとる。

(4)

真数条件より $x>0$ かつ $x-9>0$ であるから，

$$x>9$$

である。このとき与えられた方程式を解くと

$$\begin{aligned} &\log_{10}x+\log_{10}(x-9)=1\\ &\Leftrightarrow \log_{10}x(x-9)=1\\ &\Leftrightarrow x(x-9)=10\\ &\Leftrightarrow x^2-9x-10=0\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-10)=0\\ &\therefore x=10\ (\because x>9) \end{aligned}$$

となる。

(5)

$r=1$ とすると，$S_n=na$ となるため，

$$\begin{cases} S_3=-9\\ S_6=-63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3\\ a=-\frac{21}{2} \end{cases}$$

となり，矛盾する。よって $r\neq 1$ である。このとき，$S_n=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}$ となるため，

$$\begin{aligned} &S_6=-63\\ &\Leftrightarrow a\cdot\frac{1-r^6}{1-r}=-63\\ &\Leftrightarrow a\cdot\frac{1-r^3}{1-r}\cdot(1+r^3)=-63\\ &\Leftrightarrow 9(1+r^3)=-63\ \left(\because a\cdot\frac{1-r^3}{1-r}=S_3=9\right)\\ &\Leftrightarrow r^3=-8\\ &\therefore r=-2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} &S_3=9\\ &\Leftrightarrow a\cdot\frac{1-(-2)^3}{1-(-2)}=9\\ &\therefore a=3 \end{aligned}$$

である。

(6)

$$a=\int_0^1 f(t)\,dt$$

とおくと a は定数であり，与式は

$$f(x)=ax+10$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a&=\int_0^1 f(t)\,dt\\ &=\int_0^1 (at+10)\,dt\\ &=\left[\frac{a}{2}t^2+10t\right]_0^1\\ &=\frac{a}{2}+10 \end{aligned}$$

であるから，$a=20$ となる。したがって求める関数は

$$f(x)=20x+10$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	$r_2=120$	$r_3=1300$

(2)

$$\begin{aligned} r_{n+2} &= \alpha^{n+2}+\beta^{n+2} \\ &= \left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)(\alpha+\beta)-\alpha\beta\left(\alpha^n+\beta^n\right) \\ &= 10r_{n+1}+10r_n \end{aligned}$$

である。

(答) $r_{n+2}=10r_{n+1}+10r_n$

(3)

$$\begin{aligned} r_4 &= 10r_3+10r_2 \\ &= 13000+1200 \\ &= 14200 \end{aligned}$$

である。

$n \geqq 3$ のとき，整数 p_n を用いて $r_n=p_n \cdot 10^2$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=3, 4$ のとき

$$r_3=1300,\ r_4=14200$$

であるから，$p_3=13,\ p_4=142$ とすると命題は成立する。

[2] $n=k, k+1\ (k \geqq 3)$ のとき

命題が成立すると仮定すると

$$r_k=p_k \cdot 10^2,\ r_{k+1}=p_{k+1}\cdot 10^2$$

である。このとき

$$\begin{aligned} r_{k+2} &= 10r_{k+1}+10r_k \\ &= 10p_{k+1}\cdot 10^2+10p_k\cdot 10^2 \\ &= \left(10p_{k+1}+10p_k\right)\cdot 10^2 \end{aligned}$$

であるから，$p_{k+2}=10p_{k+1}+10p_k$ とすると命題は $n=k+2$ でも成立する。

以上，[1], [2]より，$n \geqq 3$ のとき，整数 p_n を用いて $r_n=p_n \cdot 10^2$ と表される。よって，

$$\begin{aligned} & r_{100}=p_{100}\cdot 10^2 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha^{100}=p_{100}\cdot 10^2-\beta^{100} \end{aligned}$$

である。ここで，$\alpha>\beta$ より，$\alpha=5+\sqrt{35},\ \beta=5-\sqrt{35}$ であり，$-1<\beta<0$ であるから，

$$\begin{aligned} & 0<\left(5-\sqrt{35}\right)^{100}<1 \\ & \therefore 0<\beta^{100}<1 \end{aligned}$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} & p_{100}\cdot 10^2-1<p_{100}\cdot 10^2-\beta^{100}<p_{100}\cdot 10^2 \\ \Leftrightarrow\ & p_{100}\cdot 10^2-1<\alpha^{100}<p_{100}\cdot 10^2 \end{aligned}$$

となるから，α^{100} の整数部分の一の位と十の位は 9 である。

(答) 一の位：9，十の位：9

〔解説〕

(1)

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=10,\ \alpha\beta=-10$$

である。よって

$$\begin{aligned} r_2 &= \alpha^2+\beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 10^2-2\cdot(-10) \\ &= 120 \end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned} r_3 &= \alpha^3+\beta^3 \\ &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 10^3-3\cdot(-10)\cdot 10 \\ &= 1300 \end{aligned}$$

である。

Ⅲ

(1)

球面の方程式は

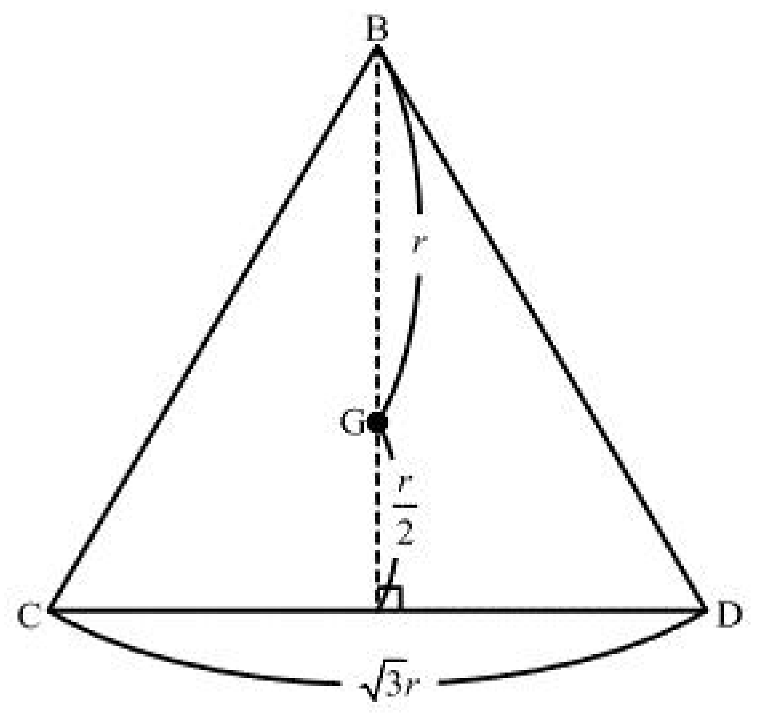
$$x^2+y^2+z^2=4 \quad \cdots ①$$

である。$a=-1$のとき，①と平面$z=-1$が交わってできる円の方程式は

$$x^2+y^2+(-1)^2=4$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=3 \quad \cdots ②$$

である。ここで，正三角形の外心と重心は一致するから，これを点Gとおくと，正三角形BCDは下図のようになる。



上図より，円の半径をrとおくと正三角形BCDの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}r\cdot\frac{3}{2}r$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

と表される。ここで，②より$r^2=3$であるから，$a=-1$のとき

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 3$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

である。

(答) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

(2)

$|a|<2$を満たす定数aについて，①と平面$z=a$が交わってできる円の方程式は

$$x^2+y^2+a^2=4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4-a^2 \quad \cdots ③$$

である。ここで，(1)より$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$であり，③より$r^2=4-a^2$であるから，

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}(4-a^2)$$

である。さらに，三角錐ABCDの高さをhとすると，

$$h=2-a$$

であるから，

$$V=\frac{1}{3}Sh$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}(4-a^2)\cdot(2-a)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)(a-2)^2$$

である。

(答) $V=\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2)(a-2)^2$

(3)

(2)の結果より

$$\frac{dV}{da}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{(a-2)^2+(a+2)\cdot 2(a-2)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-2)(3a+2)$$

であるから，$|a|<2$のとき

$$\frac{dV}{da}=0\Leftrightarrow a=-\frac{2}{3}$$

である。よってVの増減は下表のようになる。

a	(-2)	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		↗	$\frac{64\sqrt{3}}{27}$	↘	

したがって，aの値が$|a|<2$で変化するとき，Vは$a=-\frac{2}{3}$で最大値$\frac{64\sqrt{3}}{27}$をとる。

(答) 最大値：$\frac{64\sqrt{3}}{27}$，aの値：$-\frac{2}{3}$