I

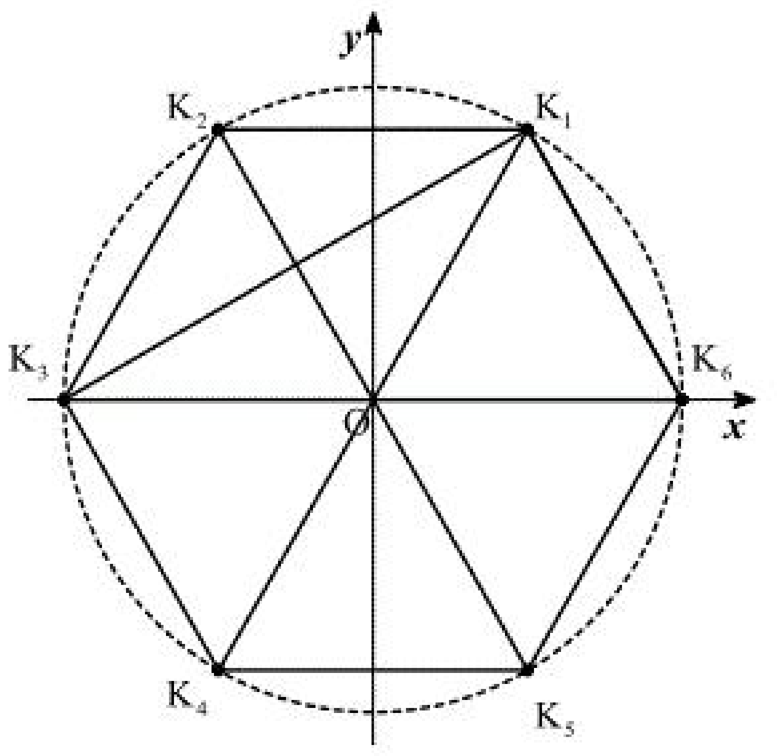
〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	b	o	c	j	f	f	j
(2)	ク	ケ					
	f	k					
(3)	コ						
	f						

〔解説〕

(1)

複素数平面において，整数 k $(1 \leqq k \leqq 6)$ に対し，$\mathrm{K}_k\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$ と定めると，下図のように K_k は単位円上にある。



$\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{B}(\beta)$ とおくと，$d=|\alpha-\beta|$ は線分 AB の長さを表す。ここで，A, B はさいころの出た目が n $(n=1, 2, \ldots, 6)$ であるとき点 K_n に一致するため，d のとりうる値を小さいものから順に並べると

$$0, 1, \sqrt{3}, 2$$

となる。また，$\mathrm{A}=\mathrm{K}_1$ とすると，$\mathrm{B}=\mathrm{K}_1$ のとき $d=0$，$\mathrm{B}=\mathrm{K}_2, \mathrm{K}_6$ のとき $d=1$，$\mathrm{B}=\mathrm{K}_3, \mathrm{K}_5$ のとき $d=\sqrt{3}$，$\mathrm{B}=\mathrm{K}_4$ のとき $d=2$ である。$\mathrm{A}=\mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \ldots, \mathrm{K}_6$ のときも同様に $d=0, 2$ である B が1個ずつ，$d=1, \sqrt{3}$ である B が2個ずつあるため，$d=0, 1, \sqrt{3}, 2$ が成り立つ確率はそれぞれ

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$$

である。

(2)

$\alpha-\beta$ が実数となるのは α の虚部と β の虚部が等しい場合，すなわち，2点 A, B が一致する場合，あるいは虚軸に関して対称である場合である。A の位置によらず，点 A と一致する点 B と点 A と虚軸対称な点 B はそれぞれ1個ずつ存在するため，$\alpha-\beta$ が実数となる確率は

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

である。ここで，2点 A, B が一致するとき $d=0$ であり，この確率は $\frac{1}{6}$ である。また，2点 A, B が虚軸に関して対称であるとき $d=1, 2$ であり，$d=1$ となるのは線分 AB が線分 $\mathrm{K}_1\mathrm{K}_2$, $\mathrm{K}_4\mathrm{K}_5$ のいずれかに一致するときである。この確率は

$$2\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

である。また，$\alpha-\beta$ が実数となるとき $d=\sqrt{3}$ となることはない。したがって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \left(\cos\frac{a\pi}{3}+i\sin\frac{a\pi}{3}\right)^2\\ &=\cos\frac{2a\pi}{3}+i\sin\frac{2a\pi}{3}\\ \beta^3 &= \left(\cos\frac{b\pi}{3}+i\sin\frac{b\pi}{3}\right)^3\\ &=\cos b\pi+i\sin b\pi\\ &=(-1)^b\end{aligned}$$

となるため，$\alpha^2=\beta^3$ となるとき，$\frac{2a\pi}{3}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2a}{3}$ は整数である，すなわち，a は3の倍数であるため，$a=3, 6$ となる。このとき，$\alpha^2=1$ となるため，$\alpha^2=\beta^3$ より，$1=(-1)^b$ である，すなわち，b は偶数である。よって，$b=2, 4, 6$ となるため，$\alpha^2=\beta^3$ となる組 (a, b) は，

$$(a, b)=(3, 2), (3, 4), (3, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$$

の6通りである。このとき，$\alpha=\pm1$ であるため，$\alpha+\beta$ と β の虚部は一致し，$\sin\frac{b\pi}{3}$ となる。よって，$\alpha^2=\beta^3$ であり，かつ，$\alpha+\beta$ の虚部が正となる組 (a, b) は，

$$(a, b)=(3, 2), (6, 2)$$

の2通りである。したがって，求める条件付き確率は，

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

である。

Ⅱ

〔解答〕

(1)	サ	シ	
	b	d	
(2)	ス	セ	ソ
	f	b	c

〔解説〕

(1)

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。このとき,

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}\\ &=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\end{aligned}$$

である。ここで,$g(x)=x\cos x-\sin x$ とおくと,

$$\begin{aligned} g'(x)&=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x\\ &=-x\sin x\end{aligned}$$

となるため,$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき,$g'(x)<0$ となる。よって,$g(x)$ は単調減少であるため,$g(x)<g(0)=0$ となる。したがって,$f'(x)<0$ となるため,$f(x)$ は単調減少である。よって,$\dfrac{\pi}{12}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき,

$$\frac{3}{\pi}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{\pi}{12}\right)<\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

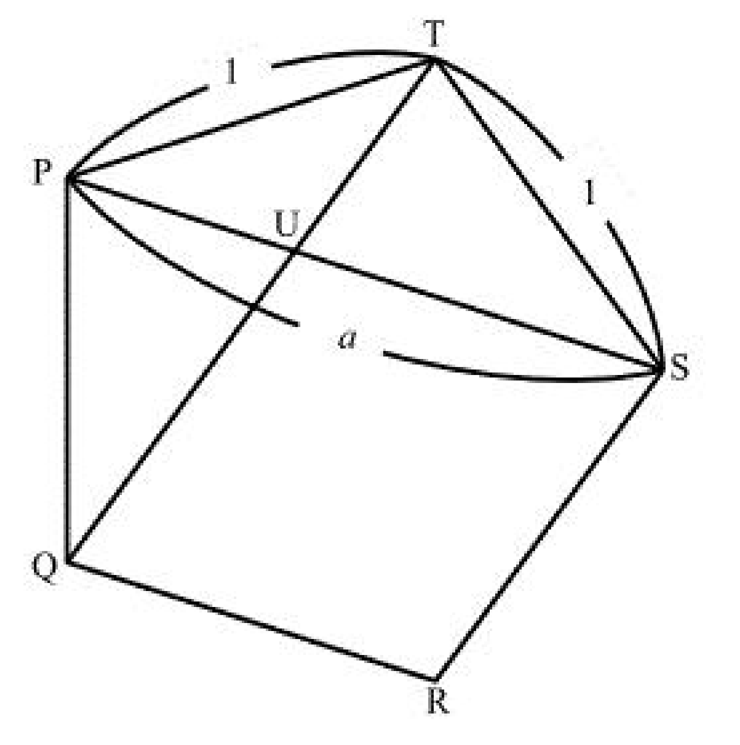
が成り立つ。ここで,$\pi<3.15$ より,

$$\frac{3}{\pi}>\frac{3}{3.15}>\frac{2.9925}{3.15}=0.95$$

となるため,$\dfrac{\pi}{12}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき,$0.95\leqq f(x)<1=0.95+0.05$ が成り立つ。

(2)

正五角形 PQRST は下図のようになる。



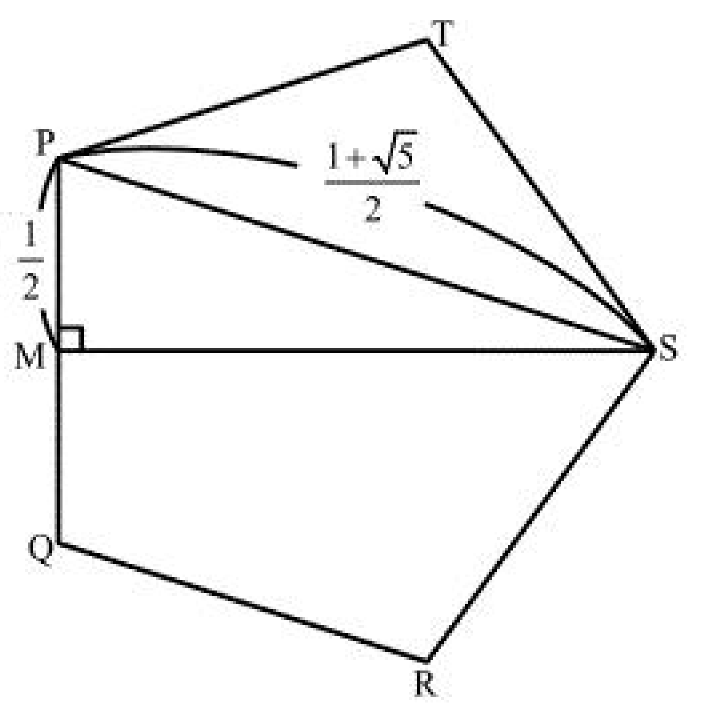
$a=\mathrm{PS}$ とおく。$\triangle\mathrm{PUT}$ と $\triangle\mathrm{STP}$ は相似であるため,

$$\begin{aligned}&\mathrm{PT}:\mathrm{SP}=\mathrm{UT}:\mathrm{TP}\\ &\Leftrightarrow 1:a=\mathrm{UT}:1\\ &\therefore \mathrm{UT}=\frac{1}{a}\end{aligned}$$

である。また,五角形 PQRST が正五角形であるため,PS と QR,TQ と SR はそれぞれ平行であり,四角形 QRSU は平行四辺形である。よって,$\mathrm{US}=\mathrm{QR}=1$ であるため,

$$\begin{aligned}&\mathrm{PS}=\mathrm{PU}+\mathrm{US}\\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{a}+1\\ &\Leftrightarrow a^2-a-1=0\\ &\therefore a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\because a>0)\end{aligned}$$

より,線分 PS の長さは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。ここで,$\triangle\mathrm{PSM}$ は下図のようになる。



$\mathrm{AM}\perp\mathrm{PM},\ \mathrm{PM}\perp\mathrm{SM}$ であるため,三平方の定理より,

$$\begin{aligned}\mathrm{AM}^2&=\mathrm{PA}^2-\mathrm{PM}^2\\ &=1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &=\frac{3}{4}\\ \mathrm{SM}^2&=\mathrm{PS}^2-\mathrm{PM}^2\\ &=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

である。よって,$\theta=\angle\mathrm{SAM}$ とすると,$\triangle\mathrm{SAM}$ について余弦定理より,

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\mathrm{AS}^2+\mathrm{AM}^2-\mathrm{SM}^2}{2\cdot\mathrm{AS}\cdot\mathrm{AM}}\\ &=\frac{1^2+\frac{3}{4}-\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}{2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\\ &=-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6}\end{aligned}$$

である。また,$1.73<\sqrt{3}<1.74,\ 2.23<\sqrt{5}<2.24$ より,

$$\begin{aligned}&-\frac{1.74\cdot(2.24-1)}{6}<-\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6}<-\frac{1.73\cdot(2.23-1)}{6}\\ &\therefore -0.3596<\cos\theta<-0.35465\end{aligned}$$

であるため,$\cos\angle\mathrm{SAM}$ の値は,

$$-0.35-0.025\leqq\cos\angle\mathrm{SAM}<-0.35+0.025$$

を満たす。ここで,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)&=-\sin\frac{\pi}{6}\\ &=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

より,$\cos\theta>\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるため,$\theta<\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}$ となる。また,

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)&=\cos^2\frac{7}{12}\pi\\ &=\frac{1+\cos\frac{7}{6}\pi}{2}\\ &=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\\ &=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

であり,$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)<0$ であるため,$\sqrt{2}<1.5,\ \sqrt{3}<1.8$ より,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)&=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}\\ &=-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}\\ &>-\frac{1.5\cdot(1.8-1)}{4}\\ &=-0.3\end{aligned}$$

となる。よって,$\cos\theta<\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\right)$ であるため,$\theta>\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}$ となる。したがって,

$\dfrac{\pi}{12}<\theta-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{6}$ であるため,(1)より,

$$\begin{aligned}&0.95\leqq f\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)<1\\ &\Leftrightarrow 0.95\leqq\frac{\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{\theta-\frac{\pi}{2}}<1\\ &\Leftrightarrow 0.95\leqq-\frac{\cos\theta}{\theta-\frac{\pi}{2}}<1\\ &\therefore -\cos\theta<\theta-\frac{\pi}{2}\leqq-\frac{\cos\theta}{0.95}\left(\because\theta-\frac{\pi}{2}>0\right)\end{aligned}$$

となる。また,$-0.3596<\cos\theta<-0.35465$ より,$-0.36<\cos\theta<-0.35$ であるため,

$$\begin{aligned}&0.35<\theta-\frac{\pi}{2}<\frac{0.36}{0.95}\\ &\therefore 0.35\cdot\frac{180^\circ}{\pi}<\theta-90^\circ<\frac{0.36}{0.95}\cdot\frac{180^\circ}{\pi}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,$3.1<\pi<3.15$ より,

$$\begin{aligned}&0.35\cdot\frac{180}{\pi}>0.35\cdot\frac{180}{3.15}=20>19.5\\ &\frac{0.36}{0.95}\cdot\frac{180}{\pi}<\frac{0.36}{0.95}\cdot\frac{180}{3.1}=\frac{12960}{589}<\frac{13252.5}{589}=22.5\end{aligned}$$

であるため,$\angle\mathrm{SAM}$ の大きさは,

$$\begin{aligned}&19.5^\circ\leqq\theta-90^\circ<22.5^\circ\\ &\Leftrightarrow 109.5^\circ\leqq\theta<112.5^\circ\\ &\therefore 111^\circ-1.5^\circ\leqq\angle\mathrm{SAM}<111^\circ+1.5^\circ\end{aligned}$$

を満たす。

Ⅲ

(1)

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$
$$=1-\frac{1}{1+e^{x}}$$

より,

$$f'(x)=\frac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$

であり,

$$f''(x)=\frac{e^{x}\cdot\left(1+e^{x}\right)^{2}-e^{x}\cdot 2\left(1+e^{x}\right)\cdot e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{4}}$$
$$=-\frac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(1+e^{x}\right)^{3}}$$

である。このとき

$$f''(x)=0$$
$$\Leftrightarrow e^{x}=1$$
$$\therefore x=0$$

であり, $x<0$ のとき $f''(x)>0$, $x>0$ のとき $f''(x)<0$ であるため, 点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ は変曲点である。よって, 点 P の座標は $\mathrm{P}\left(0,\frac{1}{2}\right)$ である。

(答) $\mathrm{P}\left(0,\frac{1}{2}\right)$

(2)

$f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(0)=\frac{1}{4}$ より, 求める接線 ℓ の方程式は

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

である。また, この直線と直線 $y=1$ は交点をもち, その点の x 座標は a であるため, 求める値は,

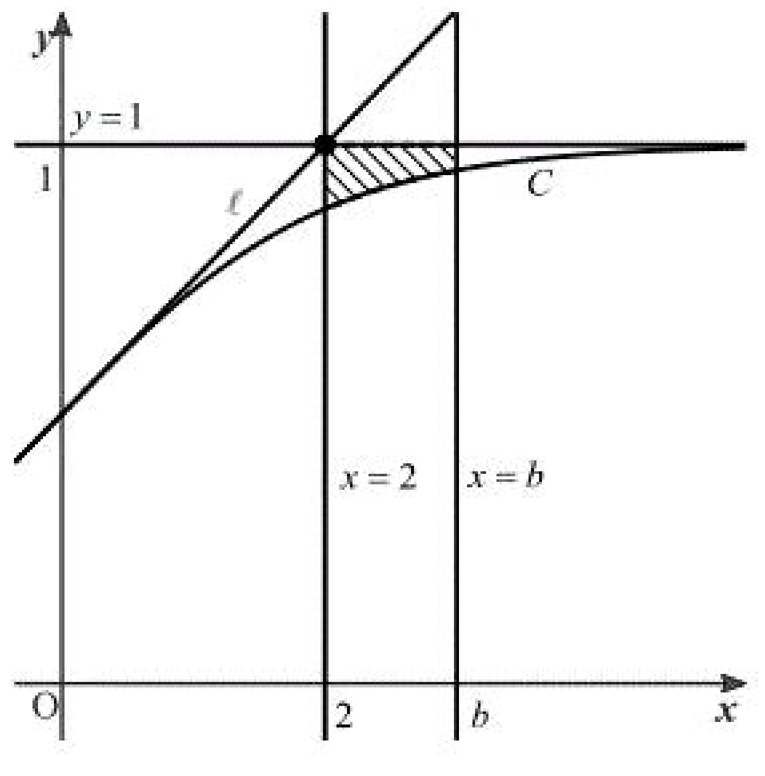
$$1=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}$$
$$\therefore a=2$$

である。

(答) $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$, $a=2$

(3)

$S(b)$ は下図の斜線部の面積である。



よって,

$$S(b)=\int_{2}^{b}\{1-f(x)\}dx$$
$$=\int_{2}^{b}\left(1-\frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx$$
$$=\int_{2}^{b}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$
$$=-\int_{2}^{b}\frac{\left(1+e^{-x}\right)'}{1+e^{-x}}dx$$
$$=\left[-\log\left(1+e^{-x}\right)\right]_{2}^{b}$$
$$=\log\frac{1+e^{-2}}{1+e^{-b}}$$

である。

(答) $S(b)=\log\frac{1+e^{-2}}{1+e^{-b}}$

(4)

$\lim_{b\to\infty}e^{-b}=0$ より, 求める値は,

$$\lim_{b\to\infty}S(b)=\lim_{b\to\infty}\log\frac{1+e^{-2}}{1+e^{-b}}$$
$$=\log\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1+e^{-2}}{1+e^{-b}}\right)$$
$$=\log\frac{1+e^{-2}}{1+0}$$
$$=\log\left(1+e^{-2}\right)$$

である。

(答) $\lim_{b\to\infty}S(b)=\log\left(1+e^{-2}\right)$

Ⅳ

(1)

二項定理より,

$$
\begin{aligned}
f(x+1) &= \sum_{l=0}^{n} a_l (x+1)^l \\
&= \sum_{l=0}^{n} a_l \sum_{k=0}^{l} {}_n\mathrm{C}_k \cdot x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{l=k}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot a_l \right) x^k
\end{aligned}
$$

となるため,

$$b_k = \sum_{l=k}^{n} \left({}_l\mathrm{C}_k \cdot a_l \right) - a_k \ \left(0 \leqq k \leqq n \right)$$

である。よって，求める項は,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \sum_{l=n}^{n} \left({}_l\mathrm{C}_n \cdot a_l \right) - a_n \\
&= 1 \cdot a_n - a_n \\
&= 0 \\
b_{n-1} &= \sum_{l=n-1}^{n} \left({}_l\mathrm{C}_{n-1} \cdot a_l \right) - a_{n-1} \\
&= 1 \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n - a_{n-1} \\
&= n a_n
\end{aligned}
$$

である。

(答) $b_n = 0,\ b_{n-1} = n a_n$

(2)

整式 $g(x)$ の次数を n とすると, (1)より，$g(x+1) - g(x)$ は $n-1$ 次の整式である。また, $g(x+1) - g(x) = (x-1)x(x+1)$ より，$g(x+1) - g(x)$ は 3 次の整式であるため,

$$
\begin{aligned}
& n - 1 = 3 \\
& \therefore n = 4
\end{aligned}
$$

である。よって，$g(x)$ は 4 次の整式である。ここで，$g(x+1) - g(x) = (x-1)x(x+1)$ より,

$$
\begin{cases}
g(2) - g(1) = 0 \\
g(1) - g(0) = 0 \\
g(0) - g(-1) = 0
\end{cases}
$$

$$\Leftrightarrow g(-1) = g(1) = g(2) = 0 \ (\because g(0) = 0)$$

であるため, 因数定理より, 複素数 $a\ (a \neq 0)$ を用いて $g(x) = ax(x-2)(x-1)(x+1)$ と表される。また，$g(x)$ は 4 次の整式であり，x^4 の係数は a であるため, (1)より,

$$
\begin{aligned}
& 1 = 4a \\
& \therefore a = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

となる。したがって，求める整式は,

$$g(x) = \frac{1}{4} x (x-2)(x-1)(x+1)$$

である。

(答) $g(x) = \frac{1}{4} x (x-2)(x-1)(x+1)$

(3)

整式 $h(x)$ の次数を n とする。$n \geqq 3$ とすると, (1)より，与式の左辺は $n-1$ 次の整式であり，右辺は n 次の整式であるため，与式は成立せず不適である。よって，$n = 1,\ 2$ である，すなわち，$h(x)$ は 2 次以下の整式であるため，$p,\ q,\ r$ を複素数として

$$h(x) = px^2 + qx + r$$

とおける。このとき,

$$
\begin{aligned}
& h(2x+1) - h(2x) \\
&= p(2x+1)^2 + q(2x+1) + r - \left\{ p(2x)^2 + q(2x) + r \right\} \\
&= 4px + p + q
\end{aligned}
$$

であり,

$$h(x) - x^2 = (p-1)x^2 + qx + r$$

である。よって,

$$4px + p + q = (p-1)x^2 + qx + r$$

が x の恒等式となるため,

$$
\begin{cases}
0 = p - 1 \\
4p = q \\
p + q = r
\end{cases}
$$

$$\therefore (p,\ q,\ r) = (1,\ 4,\ 5)$$

である。したがって，求める整式は,

$$h(x) = x^2 + 4x + 5$$

となる。

(答) $h(x) = x^2 + 4x + 5$