2023 年度入学試験問題

数　学

（試験時間　13：35〜15：15　100 分）

1．解答用紙は，記述解答用紙のみです。

2．問題は，Ⅰ〜Ⅳの 4 題あります。そのうち 3 題を選択して解答してください。**選択した問題には解答用紙の設問番号の右側の選択欄に○を，選択しなかった問題には×を記入してください。（選択欄の記入がない場合は採点の対象となりませんので注意してください。）**

なお，4 題すべてに○を記入した場合は，数学の解答はすべて無効となります。

（記入例）

Ⅰ	選　択	○

Ⅱ	選　択	×

3．解答は，**必ず解答欄の枠内に記入してください。**解答欄以外に記入した解答はすべて無効となります。特に，採点欄に解答を記入しないよう，注意してください。

4．解答は，HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し，訂正する場合は，プラスチック製の消しゴムを使用してください。

5．解答用紙を折り曲げたり，切り離したり，汚したりしないでください。

6．解答用紙には，受験番号と氏名を必ず記入してください。未記入や記入ミスがあった場合は，当該科目の解答は無効になります。

7．満点が 150 点となる配点表示になっていますが，数学科は満点が 300 点であり，各問の配点は 2 倍となります。

142－MQ

(設問は 2 ページより始まる)

I　素数 p に対し，整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 - (4p+2)x^2 + 1$$

により定める。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) $f(x) = (x^2 + ax - 1)(x^2 + bx - 1)$ を満たす実数 a と b を求めよ。ただし，$a \geqq b$ とする。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解はすべて無理数であることを示せ。

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解のうち最も大きいものを α，最も小さいものを β とする。整数 A と B が

$$AB\alpha + A - B = p(2 + p\beta)$$

を満たすとき，A と B を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

II　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-1}x\,dx$ とおく。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) I_n+I_{n+2} を n の式で表せ。

(2) $I_n<\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(3) 次の等式を示せ。

$$I_1-(-1)^nI_{2n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$$

(4) (2) と (3) を利用して，次の等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

(設問は次のページにつづく)

III　座標平面に 2 点 A$(-3,-2)$, B$(1,-2)$ をとる。また点 P が円 $x^2+y^2=1$ 上を動くとし，$S=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$，$T=\dfrac{\mathrm{BP}^2}{\mathrm{AP}^2}$ とおく。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) 点 P の座標を (x, y) とするとき，S を x, y の 1 次式として表せ。

(2) S の最小値と S を最小にする点 P の座標を求めよ。

(3) T の最小値と T を最小にする点 P の座標を求めよ。

（設問は次のページにつづく）

IV　微分可能な関数 $f(x)$ に対し，関数 $g(t)$ を以下で定める。$y = f(x)$ のグラフの点 $(t-1,\ f(t-1))$ における接線と直線 $x = t$ との交点の y 座標を $g(t)$ とする。以下の問いに答えよ。(50 点)

(1) a を定数とする。$f(x) = x^4 + ax^2$ のとき，$g(t)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を (1) の通りとする。$f(x) \geqq g(x)$ がすべての実数 x で成り立つような a の条件を求めよ。

(3) n を 2 以上の自然数とし，$f(x) = x^n$ のときの $g(x)$ を $g_n(x)$ とする。方程式 $g_n(x) = 0$ の解を求めよ。また，$n \geqq 3$ のとき，$g_n'(x)$ を $g_{n-1}(x)$ で表せ。

(4) $g_n(x)$ を (3) の通りとする。$n \geqq 3$ のとき，関数 $y = g_n(x)$ が極大値をもつための n の条件と，そのときの極大値を求めよ。

（以下計算用紙）

(計算用紙)

（計算用紙）

（計算用紙）

(計算用紙)