

I

(1)

$$\begin{aligned}\frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} &= \frac{a(k+2)+bk}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(a+b)k+2a}{k(k+1)(k+2)}\end{aligned}$$

より, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の分子の係数と比較することで,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

(3)

k によらない定数 c, d を用いて

$$\begin{aligned}\frac{c}{k(k+1)(k+2)} + \frac{d}{(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{c(k+3)+dk}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \\ &= \frac{(c+d)k+3c}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\end{aligned}$$

となり, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ の分子の係数と比較することで,

$$\begin{cases} c+d=0 \\ 3c=1 \end{cases}$$

$$\therefore c=\frac{1}{3}, d=-\frac{1}{3}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\} \\ &= \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$

II

(1)

箱 A でくじ引きを n 回行い、ちょうど k 回当たる確率は

$${}_nC_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

であり、箱 B でくじ引きを n 回行い、ちょうど k 回当たる確率は

$${}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

であるから、太郎さんがちょうど k 回当たる確率 $p(n, k)$ は、

$$p(n, k) = \frac{1}{2} \cdot {}_nC_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} + \frac{1}{2} \cdot {}_nC_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

となる。また、花子さんがちょうど k 回当たる確率 $q(n, k)$ は、

$$\begin{aligned} q(n, k) &= {}_nC_k \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^{n-k} \\ &= \frac{{}_nC_k}{2^n} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $n=3$ において、

$$k=0 \text{ のとき, } p(3, 0) = \frac{1}{6}, q(3, 0) = \frac{1}{8}$$

$$k=1 \text{ のとき, } p(3, 1) = \frac{1}{3}, q(3, 1) = \frac{3}{8}$$

$$k=2 \text{ のとき, } p(3, 2) = \frac{1}{3}, q(3, 2) = \frac{3}{8}$$

$$k=3 \text{ のとき, } p(3, 3) = \frac{1}{6}, q(3, 3) = \frac{1}{8}$$

であるから、 $p(3, k) \geq q(3, k)$ となる k は $k=0, 3$ である。

(答) $k=0, 3$

(2)

$k=0, 1, \dots, n-1$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{q(n, k+1)}{q(n, k)} &= \frac{\frac{{}_nC_{k+1}}{2^n}}{\frac{{}_nC_k}{2^n}} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}}{\frac{n!}{(n-k)!k!}} \\ &= \frac{n-k}{k+1} \end{aligned}$$

である。 $n=10$ において、 $k=0, 1, \dots, 4$ のとき $\frac{n-k}{k+1} > 1$ 、 $k=5, 6, \dots, 9$ のとき $\frac{n-k}{k+1} < 1$ である

から、 $q(10, 0) < q(10, 1) < \dots < q(10, 5)$ 、 $q(10, 5) > q(10, 6) > \dots > q(10, 10)$ となり、 $q(10, k)$ が最大となる k は $k=5$ である。

$$(答) \quad \frac{q(n, k+1)}{q(n, k)} = \frac{n-k}{k+1}, k=5$$

(3)

$$p(n, 0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, q(n, 0) = \frac{1}{2^n} \text{ より,}$$

$$\frac{p(n, 0)}{q(n, 0)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

となり、 $n=2$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{p(2, 0)}{q(2, 0)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ &= \frac{10}{9} \\ &> 1 \end{aligned}$$

であり、 $n=3, 4, \dots$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{p(n, 0)}{q(n, 0)} &> \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \\ &= \frac{32}{27} \\ &> 1 \end{aligned}$$

である。したがって、 $q(n, 0) > 0$ より、2 以上のすべての整数 n に対して、 $p(n, 0) > q(n, 0)$ が成り立つ。

(証明終)

Ⅲ

(1)

2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = ax^2$ から y を消去すると

$$x^3 + 3x^2 + 2x = ax^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (3-a)x^2 + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + (3-a)x + 2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = ax^2$ の共有点の個数は、 $\textcircled{1}$ の異なる実数解の個数に

等しい。2次方程式 $x^2 + (3-a)x + 2 = 0$ の異なる実数解の個数は、判別式 $D = (3-a)^2 - 8$ を用

いて、 $D > 0 \Leftrightarrow a < 3 - 2\sqrt{2}$, $3 + 2\sqrt{2} < a$ のとき2個、 $D = 0 \Leftrightarrow a = 3 - 2\sqrt{2}$, $3 + 2\sqrt{2}$ のとき1個、

$D < 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2}$ のとき0個であり、 $x^2 + (3-a)x + 2 = 0$ は $x = 0$ を解に持たない

から、 $\textcircled{1}$ の異なる実数解の個数、すなわち2つの曲線の共有点の個数は

$$a < 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} < a \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

$$a = 3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$3 - 2\sqrt{2} < a < 3 + 2\sqrt{2} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

である。

(答) 前述

(2)

$a = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ は

$$x(x + 2\sqrt{2}x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{2}, 0$$

となるから、2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = (3 - 2\sqrt{2})x^2$ は $x = -\sqrt{2}, 0$ で交わり、 $x = -\sqrt{2}$ で

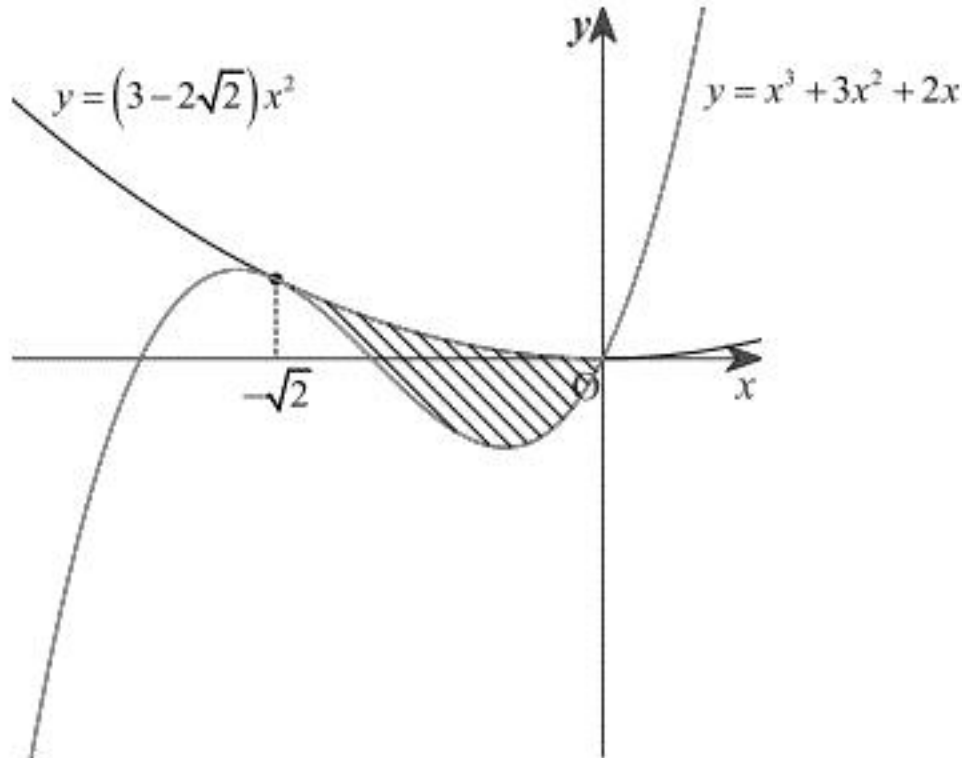
接する。また、 $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ において

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x - (3 - 2\sqrt{2})x^2 &= x(x + \sqrt{2})^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 + 3x^2 + 2x \leq (3 - 2\sqrt{2})x^2$$

となる。よって、2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = (3 - 2\sqrt{2})x^2$ で囲まれた部分を図示すると、

下図の斜線部分のようになる。



上図の斜線部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^0 \left\{ (3 - 2\sqrt{2})x^2 - (x^3 + 3x^2 + 2x) \right\} dx &= - \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x) dx \\ &= - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 + x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。次に、 $a = 3 + 2\sqrt{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ は

$$x(x - 2\sqrt{2}x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = 0, \sqrt{2}$$

となるから、2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = (3 + 2\sqrt{2})x^2$ は $x = 0, \sqrt{2}$ で交わり、 $x = \sqrt{2}$ で接す

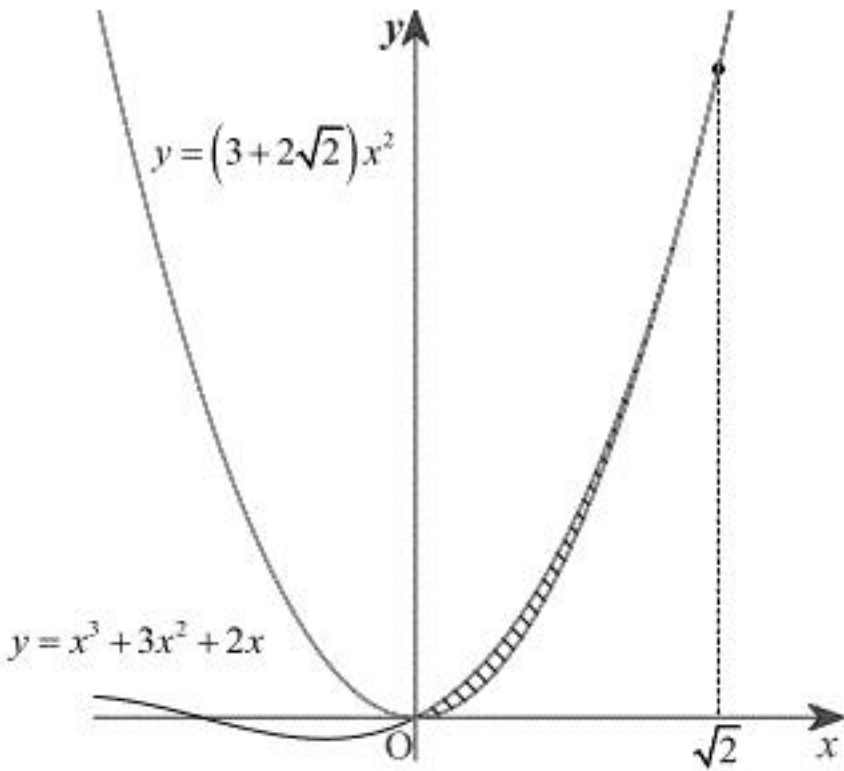
る。また、 $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ において

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 2x - (3 + 2\sqrt{2})x^2 &= x(x - \sqrt{2})^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 + 3x^2 + 2x \geq (3 + 2\sqrt{2})x^2$$

となる。よって、2つの曲線 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $y = (3 + 2\sqrt{2})x^2$ で囲まれた部分を図示すると、

下図の斜線部分のようになる。



上図より、斜線部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ (x^3 + 3x^2 + 2x) - (3 + 2\sqrt{2})x^2 \right\} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x^3 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。以上より、2つの曲線で囲まれた部分の面積は $a = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき $\frac{1}{3}$ であり、

$a = 3 + 2\sqrt{2}$ のとき $\frac{1}{3}$ である。

(答) $a = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき $\frac{1}{3}$, $a = 3 + 2\sqrt{2}$ のとき $\frac{1}{3}$