

I

(1)

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

より,

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{2} \\ &= \frac{1^2 - 5}{2} \\ &= -2\end{aligned}$$

である。

(答) -2

(2)

$$\begin{aligned}P &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) - (x^3 + y^3 + z^3) \\ &= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) - (x^3 + y^3 + z^3) \\ &= -3xyz\end{aligned}$$

である。

(答) $P = -3xyz$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} - (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)}{-3} \\ &= \frac{1 \cdot \{5 - (-2)\} - 2}{-3} \\ &= -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{5}{3}$

(4)

$$\begin{aligned}\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2\{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)\} \\ &= 5^2 - 2\left\{(-2)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 1\right\} \\ &= \frac{31}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{31}{3}$

II

(1)

$C(\sqrt{3}, 7)$ を中心とし、 O を通る円の半径は $OC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 7^2} = 2\sqrt{13}$ であるから、円の方程式は、

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 7)^2 = 52$$

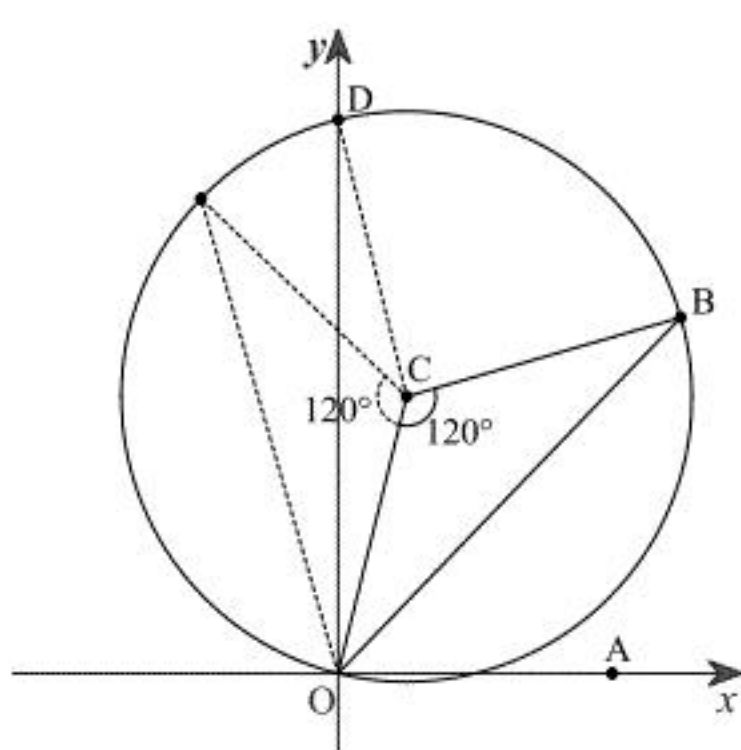
である。

$$(\text{答}) \quad (x - \sqrt{3})^2 + (y - 7)^2 = 52$$

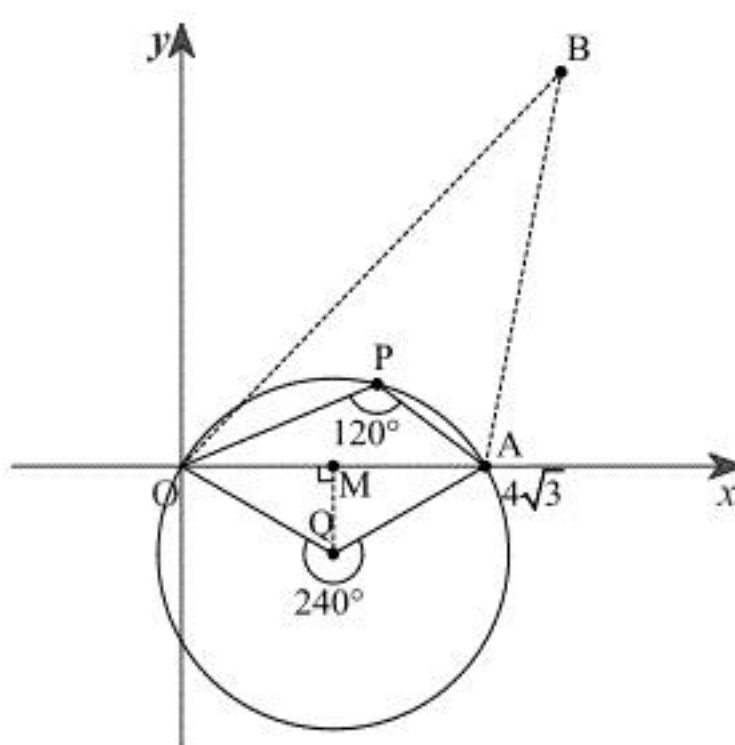
(2)

$\triangle OBC$ は $CO:CB:OB=1:1:\sqrt{3}$ であるから、 $\angle OCB=120^\circ$ の二等辺三角形である。また、直線 OC の傾きは $\frac{7}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$ より、 $\angle AOC > 60^\circ$ であり、 $D(0, 14)$ とおくと、

$\angle OCD = 2\angle AOC > 120^\circ$ とわかる。よって、 B の x 座標は正であることより、点 B の位置は下図のようになる。



また、3点 O, P, A を通る円は下図のようになる。



円周角の定理より、点 P の位置に関わらず、円の中心 Q は直線 OA に対して点 B の反対側にあり、 $\angle OQA = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ = 120^\circ$ を満たす。ここで、点 Q から線分 OA に下ろした垂線の足を M とすると、 $OQ = QA$ より、 $OM = AM = 2\sqrt{3}$ 、 $\angle OQM = \angle AQM = 60^\circ$ であり

$MQ:OM:OQ=1:\sqrt{3}:2$ である。よって、円の中心は $Q(2\sqrt{3}, -2)$ 、半径は $OQ = 4$ となる。

$$(\text{答}) \quad (2\sqrt{3}, -2)$$

(3)

点 C は直線 OB に対して点 A の反対側にあり、 $\angle OCB = 120^\circ$ を満たしているから、3点 O, P, B を通る円の方程式は(1)で求めたものとなる。ここで、3点 O, P, A を通る円の方程式

は $(x - 2\sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 16$ であるから、3点 O, P, A を通る円の方程式と3点 O, P, B を通る円の方程式を連立すると、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x - 2\sqrt{3})^2 + (y + 2)^2 = 16 \\ (x - \sqrt{3})^2 + (y - 7)^2 = 52 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3}x + y^2 + 4y = 0 \\ x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 - 14y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}x + 18y = 0 \\ x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 - 14y = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{3}y \\ (3\sqrt{3}y)^2 - 2\sqrt{3}(3\sqrt{3}y) + y^2 - 14y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} & (3\sqrt{3}y)^2 - 2\sqrt{3}(3\sqrt{3}y) + y^2 - 14y = 0 \\ & \Leftrightarrow 28y^2 - 32y = 0 \\ & \Leftrightarrow 4y(7y - 8) = 0 \\ & \therefore y = 0, \frac{8}{7} \end{aligned}$$

であるから、交点の座標は $(0, 0), \left(\frac{24\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$ となる。これらが O と P であるから、 P の座標

は $\left(\frac{24\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{24\sqrt{3}}{7}, \frac{8}{7}\right)$$

Ⅲ

(1)

$f(x) = -x^3 + 3ax^2 + 3a^2 - 2a$ のとき, $f'(x) = -3x^2 + 6ax$ である。

(答) $f'(x) = -3x^2 + 6ax$

(2)

点 $P(t, f(t))$ における接線の傾きは $-3t^2 + 6at$ であるから, 接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (-3t^2 + 6at)(x - t) - t^3 + 3at^2 + 3a^2 - 2a \\ \therefore y &= (-3t^2 + 6at)x + 2t^3 - 3at^2 + 3a^2 - 2a \end{aligned}$$

となる。 $x=0$ のときの値が $g(t)$ であるから,

$$g(t) = 2t^3 - 3at^2 + 3a^2 - 2a$$

であり,

$$g'(t) = 6t^2 - 6at$$

である。

(答) $g(t) = 2t^3 - 3at^2 + 3a^2 - 2a, g'(t) = 6t^2 - 6at$

(3)

曲線 $y = f(x)$ の接線のうちで原点を通るのは, $g(t) = 0$ となるときであり, t が異なれば接線も異なるから, 接線のうちで原点を通るものが 1 本だけ存在することは, $g(t) = 0$ を満たす実数がただ 1 つ存在することと同値である。ここで, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, a$ より, 0 と a の大小関係で場合分けを行う。また, $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ であることに留意する。

[1] $a > 0$ のとき

$g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	0	...	a	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\nearrow$	$3a^2 - 2a$	$\searrow$	$-a^3 + 3a^2 - 2a$	$\nearrow$

$g(t) = 0$ を満たす実数がただ 1 つ存在することは, $3a^2 - 2a < 0$ または $0 < -a^3 + 3a^2 - 2a$ が成り立つことと同値である。

$$\begin{aligned} 3a^2 - 2a &< 0 \\ \Leftrightarrow 3a \left(a - \frac{2}{3} \right) &< 0 \\ \therefore 0 < a &< \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < -a^3 + 3a^2 - 2a \\ \Leftrightarrow a(a-1)(a-2) &< 0 \\ \therefore a < 0, 1 < a &< 2 \end{aligned}$$

であるから, $a > 0$ と合わせて, a の値の範囲は, $0 < a < \frac{2}{3}, 1 < a < 2$ である。

[2] $a = 0$ のとき

$g'(t) \geq 0$ (等号成立は $t = 0$) より, $g(t)$ は単調増加する。したがって, $g(t) = 0$ を満たす実数はただ 1 つ存在する。

[3] $a < 0$ のとき

$g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	a	...	0	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	$\nearrow$	$-a^3 + 3a^2 - 2a$	$\searrow$	$3a^2 - 2a$	$\nearrow$

$g(t) = 0$ を満たす実数がただ 1 つ存在することは, $-a^3 + 3a^2 - 2a < 0$ または $0 < 3a^2 - 2a$ が成り立つことと同値である。

$$\begin{aligned} 0 < 3a^2 - 2a \\ \Leftrightarrow 0 < 3a \left(a - \frac{2}{3} \right) \\ \therefore a < 0, \frac{2}{3} &< a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a^3 + 3a^2 - 2a &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < a(a-1)(a-2) \\ \therefore 0 < a < 1, 2 < a \end{aligned}$$

であるから, $a < 0$ のとき $g(t) = 0$ を満たす実数はただ 1 つ存在する。

以上, [1], [2], [3] より, 求める a の値の範囲は, $a < \frac{2}{3}, 1 < a < 2$ である。

(答) $a < \frac{2}{3}, 1 < a < 2$