

I

関数 $y = \log_4 x + \log_2 (\sqrt{x}(6-x^2))$ は、真数条件より

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x}(6-x^2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{6}$$

であり、

$$\begin{aligned} y &= \log_4 x + \log_2 (\sqrt{x}(6-x^2)) \\ &= \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 (\sqrt{x}(6-x^2)) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 (\sqrt{x}(6-x^2)) \\ &= \log_2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}(6-x^2) \\ &= \log_2 x(6-x^2) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $f(x) = x(6-x^2)$ とおくと、 $f'(x) = -3x^2 + 6$ である。よって、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり、真数条件から $x = \sqrt{2}$ である。このことから以下の増減表を得る。

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{6})$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$f(\sqrt{2})$		

増減表より関数 $y = f(x)$ は $x = \sqrt{2}$ のとき最大値

$$f(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} = 2^{\frac{5}{2}}$$

をとる。底 $2 > 1$ より、関数 $y = f(x)$ が最大値となるとき、関数 $y = \log_2 f(x)$ は最大値となるから、 $x = \sqrt{2}$ のとき最大値

$$y = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

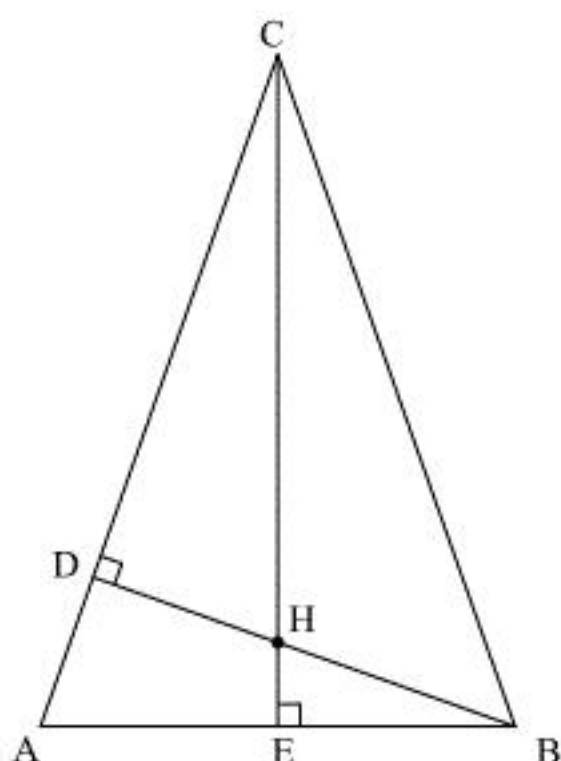
をとる。

(答) $x = \sqrt{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{2}$

Ⅱ

(1)

$\triangle ABC$ は下図のようになる。



$\triangle ABC$ は $BC = CA$ の二等辺三角形であるから、 E は辺 AB の中点である。このことから、 $AE = 1$ であり、

$$\cos A = \frac{AE}{CA} = \frac{1}{3}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} AD &= AB \cos A \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DC &= AC - AD \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$AD : DC = 2 : 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

と求められる。

(答) $AD : DC = 2 : 7$

(2)

点 H は辺 BD , CE 上にあるため $BH : HD = t : 1 - t$, $CH : HE = s : 1 - s$ ($0 < t < 1$, $0 < s < 1$) とおける。このとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= (1 - t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AD} \\ &= (1 - t)\vec{b} + \frac{2}{9}t\vec{c} \quad (\because \textcircled{1}) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= s\overrightarrow{AE} + (1 - s)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}s\vec{b} + (1 - s)\vec{c} \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と $\overrightarrow{AH}$ を 2 通りで表せ、 $\vec{b}$, $\vec{c}$ は一次独立であるから、②, ③より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1 - t = \frac{1}{2}s \\ \frac{2}{9}t = 1 - s \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{7}{8} \\ t = \frac{9}{16} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{16}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$ である。

(答) $\overrightarrow{AH} = \frac{7}{16}\vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c}$

III

$\left| \int_0^1 f(x) dx \right|$ は 0 または正の定数より、 $k = \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$ とおくと $f(x) = x - 2k$ ($k \geq 0$) であるから、

$$\begin{aligned} k &= \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 (x - 2k) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{x^2}{2} - 2kx \right]_0^1 \right| \\ &= \left| 2k - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

となる。

[1] $2k - \frac{1}{2} \geq 0$ すなわち $k \geq \frac{1}{4}$ のとき

$$k = 2k - \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

となり、これは $k \geq \frac{1}{4}$ を満たす。

[2] $2k - \frac{1}{2} < 0$ すなわち $0 \leq k < \frac{1}{4}$ のとき

$$k = -\left(2k - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$$

となり、これは $0 \leq k < \frac{1}{4}$ を満たす。

[1], [2]より、 $k = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ であるから $f(x) = x - \frac{1}{3}$ または $x - 1$ である。

(答) $f(x) = x - \frac{1}{3}, x - 1$

IV

(1)

出る目の最小値が3以上であるのは、3個のさいころの目が全て3以上となるときであるから、この確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{27}$$

(2)

出る目の最小値が3である事象は、最小値が3以上である事象から最小値が4以上である事象を除いたものである。出る目の最小値が4以上となるのは、3個のさいころの目が全て4以上となるときであるから、求める確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{37}{216}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{37}{216}$$

(3)

出る目の最大公約数が2であるのは、3個のさいころの目が全て偶数である場合から、3個とも4または3個とも6となる場合を除いたものであるから、この確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 2 = \frac{25}{216}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{25}{216}$$