

I

【解答】

(1)	$-2 < x < 0$	(2)	$n(\overline{A \cap B}) = 686$
(3)	$\frac{1}{4}$ または $\frac{397}{1728}$	(4)	$\alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi$
(5)	$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$	(6)	$x = \frac{3}{4}$

【解説】

(1) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ である。以下、 $x^2 - 2x - 3$ の正負によって場合分けする。

[1] $(x - 3)(x + 1) \geq 0$ ，すなわち $x \leq -1, x \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} &|x^2 - 2x - 3| + x < 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0 \\ &\therefore -2 < x \leq -1 \ (\because x \leq -1, x \geq 3) \end{aligned}$$

となる。

[2] $(x - 3)(x + 1) < 0$ ，すなわち $-1 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} &|x^2 - 2x - 3| + x < 3 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 3x < 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 3) > 0 \\ &\therefore -1 < x < 0 \ (\because -1 < x < 3) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より，不等式 $|x^2 - 2x - 3| + x < 3$ の解は

$$-2 < x < 0$$

である。

(2) ド・モルガンの法則より

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= n(\overline{A \cup B}) \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\} \end{aligned}$$

となる。ここで，5 と 7 は互いに素であるから $A \cap B = \{x | x \text{ は } 35 \text{ の倍数}\}$ であり，

$$1000 = 5 \cdot 200 = 7 \cdot 142 + 6 = 35 \cdot 28 + 20$$

であるから，

$$\begin{aligned} n(A) &= 200 \\ n(B) &= 142 \\ n(A \cap B) &= 28 \end{aligned}$$

である。よって， $n(U) = 1000$ であることと合わせると，

$$\begin{aligned} n(\overline{A \cap B}) &= 1000 - (200 + 142 - 28) \\ &= 686 \end{aligned}$$

となる。

(3) 末尾の 2 桁の選び方の総数は 78, 87 の 2 通りである。また，各桁の数はそれぞれ 5 以上ですべて異なる数であるため，千の位と百の位の数の選び方の総数は 5, 6, 9 から 2 つ選んで並べる順列の総数に等しく，

$${}_3P_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって，記憶にあてはまる暗証番号の組み合わせの総数は

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ (通り)}$$

である。したがって，無事にログインできる事象は 3 回とも暗証番号を間違える事象の余事象であるから，求める確率は

$$1 - \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{4}$$

である。

(3)[同じ暗証番号を複数回入力する可能性があるとした場合の別解]

末尾の 2 桁の選び方は 78, 87 の 2 通りである。また，各桁の数はそれぞれ 5 以上ですべて異なる数であるため，千の位と百の位の数の選び方の総数は 5, 6, 9 から 2 つ選んで並べる順列の総数に等しく，

$${}_3P_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。よって，記憶にあてはまる暗証番号の組み合わせの総数は

$$2 \cdot 6 = 12 \text{ (通り)}$$

である。ここで，無事にログインできる事象は 3 回とも暗証番号を間違える事象の余事象である。このとき，同じ暗証番号を複数回入力する可能性があるとする，求める確率は

$$1 - \left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{397}{1728}$$

である。

(4) 加法定理より，

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。ここで， $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \alpha + \beta < \pi$ であるから，

$$\alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi$$

である。

(5)

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 5(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

(6)

$$B = \int_0^2 f'(t) dt \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

とすると， B は定数であり，

$$f(x) = Bx^2 + Ax \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

と表せる。よって，これを①に代入すると，

$$\begin{aligned} B &= \int_0^2 f'(t) dt \\ \Leftrightarrow B &= \left[Bt^2 + At \right]_0^2 \\ \Leftrightarrow B &= 2A + 4B \\ \Leftrightarrow 2A + 3B &= 0 \qquad \cdots \cdots \text{③} \end{aligned}$$

が成立する。また， $f(1) = 1$ より，

$$A + B = 1 \qquad \cdots \cdots \text{④}$$

が成立する。したがって，③，④より

$$A = 3, B = -2$$

となり，これを②に代入すると，

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 3x \\ &= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

である。以上より， $x = \frac{3}{4}$ のとき $f(x)$ が最大となる。

II

【解答】

(1)	A 国： $\left(\frac{24}{25}\right)^n x$	B 国： $\left(\frac{27}{25}\right)^n \frac{x}{2}$
-----	---------------------------------------	---

(2)

(1)より、 n 年後に B 国の GDP が A 国の GDP より大きくなるとき、

$$\begin{aligned}\left(\frac{27}{25}\right)^n \frac{x}{2} &> \left(\frac{24}{25}\right)^n x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^n &> 2 \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。ここで、任意の自然数 n に対して両辺はともに正であるから、両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned}n \log_{10} \frac{9}{8} &> \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow (2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2)n &> \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{\log_{10} 2}{2 \log_{10} 3 - 3 \log_{10} 2} \\ \Leftrightarrow n &> \frac{0.3010}{0.0512} = 5.8 \cdots\end{aligned}$$

となる。したがって、B 国の GDP が初めて A 国の GDP より大きくなるのは今年から 6 年後である。

(答) 6 年後

【解説】

(1)

今年の A 国の GDP は B 国の 2 倍であるから、今年の A 国の GDP を x とすると、今年の B 国の GDP は $\frac{x}{2}$ である。このとき、A 国の GDP は 1 年ごとに 4% 減少、すなわち $\frac{24}{25}$ 倍となるため、 n 年後の A 国の GDP は

$$\left(\frac{24}{25}\right)^n x$$

と表せる。また、B 国の GDP は 1 年ごとに 8% 増加、すなわち $\frac{27}{25}$ 倍となるため、 n 年後の B 国の GDP は

$$\left(\frac{27}{25}\right)^n \frac{x}{2}$$

と表せる。

Ⅲ

(1)

曲線 $C: y = x^2 - 2x$ において,

$$y' = 2x - 2$$

であるから, C 上の点 $P_n(a_n, a_n^2 - 2a_n)$ における接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y - (a_n^2 - 2a_n) &= (2a_n - 2)(x - a_n) \\ \Leftrightarrow y &= 2(a_n - 1)x - a_n^2 \end{aligned}$$

となる。よって, この接線と x 軸との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 0 &= 2(a_n - 1)x - a_n^2 \\ \therefore x &= \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)} \quad (\because a_n > 1) \end{aligned}$$

となるため,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{a_n^2}{2(a_n - 1)} - 2}{\frac{a_n^2}{2(a_n - 1)}} \\ &= \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{a_n^2} \\ &= \left(\frac{a_n - 2}{a_n} \right)^2 \\ &= b_n^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_{n+1} = b_n^2$$

(3)

(2)より $b_{n+1} = b_n^2$ であり, $b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1} = \frac{1}{2} > 0$ であることと合わせると,

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1}^2 \\ &= (b_{n-2}^2)^2 \\ &= b_{n-2}^{2 \cdot 2} \\ &= b_{n-2}^{2^2} \\ &= (b_{n-3}^2)^{2^2} \\ &= b_{n-3}^{2 \cdot 2^2} \\ &= b_{n-3}^{2^3} \\ &= \dots \\ &= b_1^{2^{n-1}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b_n = 2^{-2^{n-1}}$$