

I

【解答】

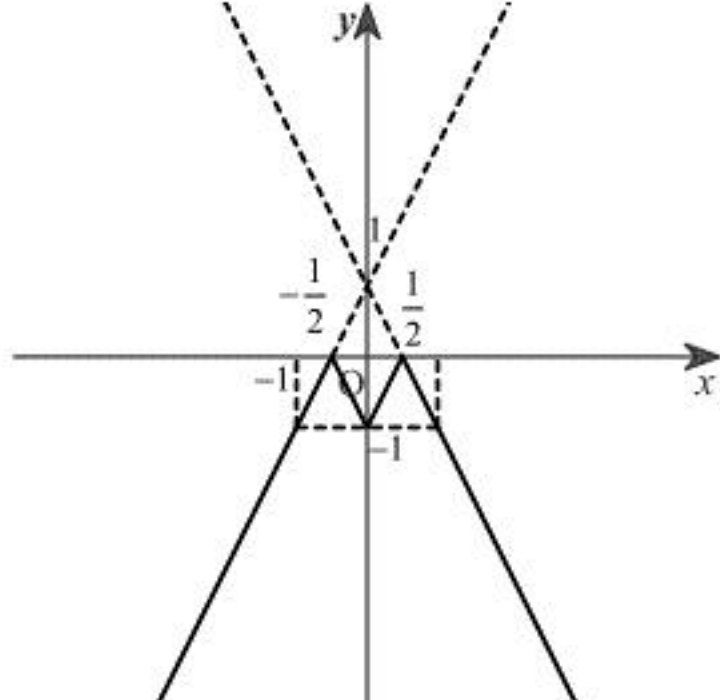
ア	c
イ	h
ウ	h
エ	h
オ	h
カ	c
キ	f

【解説】

(1)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \left(x < -\frac{1}{2}\right) \\ -2x-1 & \left(-\frac{1}{2} \leq x < 0\right) \\ 2x-1 & \left(0 \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ -2x+1 & \left(\frac{1}{2} \leq x\right) \end{cases}$$

より、 $y=f(x)$ を図示すると、下図のようになる。



上図より $a \geq 1$ において、 $b \geq 1$ のとき、すべての x に対し $f(x) \leq g(x) (= ax+b)$ が成り立つ条件は

件は $1 \leq a \leq 2$ であり、 $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ のときすべての x に対し $f(x) \leq g(x)$ が成り立つ条件は

$y=g(x)$ が点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ より上にあるときより、

$$0 \leq -\frac{1}{2}a+b \Leftrightarrow a \leq 2b$$

である。また $b < \frac{1}{2}$ のとき、

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right)-g\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}a-b \\ &> 0 \left(\because a \geq 1, b < \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

より、 $x=-\frac{1}{2}$ にて $f(x) > g(x)$ となるため、すべての x に対し $f(x) \leq g(x)$ が成り立つ a は存在しない。

(2)

$h(x)=e^x$ より $h'(x)=e^x$ であるため、 $x=p$ における $y=h(x)$ の接線の方程式は

$$y=e^p(x-p)+e^p$$

$$\therefore y=e^p x+(-p+1)e^p$$

である。したがって、 $a=e^p$ のとき、すべての実数 x に対し、 $g(x) \leq h(x)$ が成り立つのは

$$b \leq (-p+1)e^p$$

のときであり、これは a と b の関係として、 $a=e^p \Leftrightarrow p=\log a$ より

$$b \leq a(1-\log a)$$

と表される。

(3)

(1), (2)より領域 D を図示する。曲線 $b=a(1-\log a)$ について、

$$b' = a\left(-\frac{1}{a}\right) + (1-\log a) = -\log a$$

であり、これは $0 < a < 1$ において正であり、 $1 < a$ において負である。また、 $A=-\log a$ において

$$\lim_{a \rightarrow 0} a(1-\log a) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1+A}{e^A}$$

である。ここで、 $0 < A$ において

$$e^A > 1$$

$$\begin{aligned} e^A &= \int_0^A e^x dx + e^0 \\ &> \int_0^A 1 dx + e^0 \\ &= 1+A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^A &= \int_0^A e^x dx + e^0 \\ &> \int_0^A (1+x) dx + e^0 \\ &= 1+A+\frac{1}{2}A^2 \end{aligned}$$

であるので、 $0 < \frac{1+A}{e^A} < \frac{1+A}{1+A+\frac{1}{2}A^2}$ となる。また、

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1+A}{1+A+\frac{1}{2}A^2} = 0$$

である。したがって、はさみうちの原理より

$$\lim_{a \rightarrow 0} a(1-\log a) = 0$$

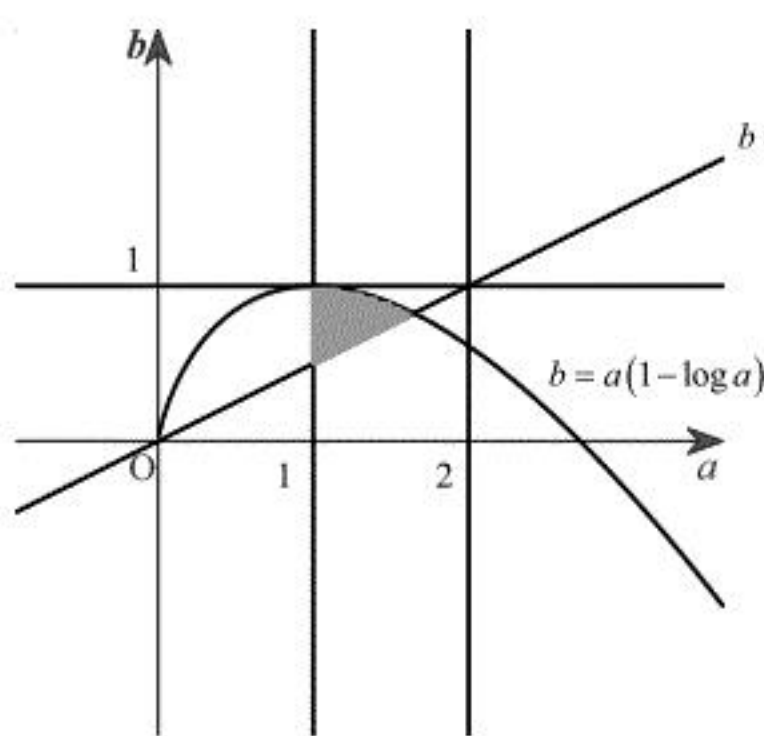
となる。また、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a(1-\log a) = -\infty$$

となる。したがって、 $b=a(1-\log a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	...	1	...	∞
b'		+	0	-	
b		$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

したがって領域 D は下図の灰色の部分のようになる。



上図より、 D における a の最大値は

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= a(1-\log a) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1-\log a \quad (\because a \geq 1) \\ \Leftrightarrow \log a &= \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

である。また、 D の面積は

$$\begin{aligned} &\int_1^{\sqrt{e}} \left\{ a(1-\log a) - \frac{a}{2} \right\} da \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{a}{2} - a \log a \right) da \\ &= \left[\frac{a^2}{4} \right]_1^{\sqrt{e}} - \left\{ \left[\frac{a^2}{2} \log a \right]_1^{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{e}} a^2 \cdot \frac{1}{a} da \right\} \\ &= \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{e}} a da \\ &= \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4} \right) - \frac{e}{4} + \frac{1}{2} \left[\frac{a^2}{2} \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= -\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e-2}{4} \end{aligned}$$

である。

II

【解答】

ク	d
ケ	a
コ	a
サ	a
シ	n
ス	m
セ	n
ソ	m

【解説】

(1)

$n=3$ のとき、カードの取り出し方は9通りあり、これらはすべて同様に確からしい。

$X-Y-1$ が3の倍数となる (X, Y) の組み合わせは

$$(X, Y) = (1, 3), (2, 1), (3, 2)$$

であるから、

$$q(3) = \frac{3}{3^2} = \frac{1}{3}$$

である。

(2)

1回目に x 、2回目に y を引き、 $X-Y-1$ が3の倍数であるとき、

$$x-y=3k+1 \quad (k \text{ は整数})$$

と書ける。逆に、1回目に y 、2回目に x を引いたとき、

$$\begin{aligned} X-Y+1 &= y-x+1 \\ &= -3k \end{aligned}$$

となるため、 $X-Y+1$ が3の倍数となる場合の数と、 $X-Y-1$ が3の倍数となる場合の数は等しい。したがって、

$$r(n) = q(n)$$

が成り立つ。

(3)

カードの取り出し方は $n \times n = n^2$ 通りあり、これらはすべて同様に確からしい。 n が3の倍数

であるとき、 X の値に関わらず、 $X-Y$ が3の倍数となるような Y の値は $\frac{n}{3}$ 個である。カー

ドの取り出し方は $n \times n = n^2$ 通りありこれらは同様に確からしいため、

$$p(n) = \frac{n \cdot \frac{n}{3}}{n^2} = \frac{1}{3}$$

が成り立つ。

(4)

$n-1$ が3の倍数であるとき、3で割った余りが1, 2, 0である数はそれぞれ $\frac{n+2}{3}, \frac{n-1}{3}, \frac{n-1}{3}$

(個)である。したがって、 Y が X と同じ余りの数であるときを考えればよいため、

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{\left(\frac{n+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{n-1}{3}\right)^2}{n^2} \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4 + 2n^2 - 4n + 2}{9n^2} \\ &= \frac{3n^2 + 6}{9n^2} \\ &= \frac{n^2 + 2}{3n^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(5)

$n-2$ が3の倍数であるとき、3で割った余りが1, 2, 0である数はそれぞれ $\frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n-2}{3}$

(個)である。したがって、 Y が X と同じ余りの数であるときを考えればよいため、

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{n-2}{3}\right)^2}{n^2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n + 2 + n^2 - 4n + 4}{9n^2} \\ &= \frac{3n^2 + 6}{9n^2} \\ &= \frac{n^2 + 2}{3n^2} \end{aligned}$$

が成り立つ。

Ⅲ

(1)

$$\begin{aligned}s_2(x) &= f(x)^2 + g(x)^2 \\ &= \{f(x) + g(x)\}^2 - 2f(x)g(x)\end{aligned}$$

より, $s_1(x) = f(x) + g(x) = x$, $s_2(x) = x^2 + 2$ を代入すると,

$$\begin{aligned}x^2 + 2 &= x^2 - 2f(x)g(x) \\ \therefore f(x)g(x) &= -1\end{aligned}$$

となる。また, このとき

$$\begin{aligned}s_3(x) &= f(x)^3 + g(x)^3 \\ &= \{f(x) + g(x)\}^3 - 3f(x)g(x)\{f(x) + g(x)\} \\ &= x^3 + 3x \quad (\because s_1(x) = x, f(x)g(x) = -1)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x)g(x) = -1, s_3(x) = x^3 + 3x$$

(2)

$$\begin{aligned}s_{n+2}(x) &= f(x)^{n+2} + g(x)^{n+2} \\ &= \{f(x)^{n+1} + g(x)^{n+1}\}\{f(x) + g(x)\} - f(x)g(x)\{f(x)^n + g(x)^n\} \\ &= s_{n+1}(x) \cdot x - (-1)s_n(x) \\ &= xs_{n+1}(x) + s_n(x)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s_{n+2}(x) = xs_{n+1}(x) + s_n(x)$$

(3)

(2)の答えの式 $s_{n+2}(x) = xs_{n+1}(x) + s_n(x)$ に $x=0$ を代入すると,

$$s_{n+2}(0) = s_n(0)$$

であるため, 帰納的に

$$n \text{ が奇数のとき, } s_n(0) = s_1(0) = 0$$

$$n \text{ が偶数のとき, } s_n(0) = s_2(0) = 2$$

となる。また, $s_{n+2}(x) = xs_{n+1}(x) + s_n(x)$ の両辺を x で微分すると,

$$s'_{n+2}(x) = s'_{n+1}(x) + xs'_{n+1}(x) + s'_n(x)$$

であるため, $x=0$ を代入すると,

$$s'_{n+2}(0) = s'_{n+1}(0) + s'_n(0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。したがって, n の偶奇で場合分けする。

[1] n が奇数のとき

$$s_{n+1}(0) = 2 \text{ より, } \textcircled{1} \text{ から } s'_{n+2}(0) = s'_n(0) + 2 \text{ となる。 } s'_1(0) = 1 \text{ より } s'_n(0) = n \text{ となる。}$$

[2] n が偶数のとき

$$s_{n+1}(0) = 0 \text{ より, } \textcircled{1} \text{ から } s'_{n+2}(0) = s'_n(0) \text{ となる。 } s'_2(0) = 0 \text{ より } s'_n(0) = 0 \text{ となる。}$$

以上[1], [2]より

$$n \text{ が奇数のとき, } s'_n(0) = n$$

$$n \text{ が偶数のとき, } s'_n(0) = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s_n(0) = \begin{cases} 0 & (n \text{ が奇数}) \\ 2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}, s'_n(0) = \begin{cases} n & (n \text{ が奇数}) \\ 0 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

IV

(1)

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \sin^n x dx \\
 &= \left[-\cos x \sin^n x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot n \cos x \sin^{n-1} x dx \\
 &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-1} x dx \\
 &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-1} x - \sin^{n+1} x) dx \\
 &= n(I_{n-1} - I_{n+1}) \\
 \therefore (n+1)I_{n+1} &= nI_{n-1}
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 nI_n I_{n-1} &= I_n \cdot (n+1)I_{n+1} \quad (\because (n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}) \\
 &= (n+1)I_{n+1} I_n
 \end{aligned}$$

より帰納的に

$$\begin{aligned}
 nI_n I_{n-1} &= I_1 I_0 \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\
 &= \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= (0+1) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x - \sin^{n+1} x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin x) dx
 \end{aligned}$$

である。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin^n x > 0$, $1 - \sin x > 0$ より $\sin^n x (1 - \sin x) > 0$ となるため,

$$\begin{aligned}
 I_n - I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (1 - \sin x) dx > 0 \\
 \therefore I_{n+1} &< I_n
 \end{aligned}$$

であり, 示された。

(証明終)

(4)

(3)より

$$nI_{n+1}I_n < nI_n^2 < nI_n I_{n-1} \quad (\because I_{n+1} < I_n < I_{n-1})$$

であり, (2)より

$$\begin{aligned}
 nI_{n+1}I_n &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 nI_n I_{n-1} &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} nI_{n+1}I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

より, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}$$