

2024 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

(試験時間 15:20～17:00 100 分)

1. 解答用紙には、記述解答用紙とマーク解答用紙の2種類があります。
2. 解答は、必ず解答欄の枠内に記入もしくはマークしてください。解答欄以外への記入およびマークはすべて無効となります。特に、記述解答用紙の採点欄に解答を記入しないよう、注意してください。
3. 解答は、HBの鉛筆またはシャープペンシルを使用し、訂正する場合は、プラスチック製の消しゴムを使用してください。特に、一度マークした箇所を修正する場合、しっかりと消してください。消し残りがあると、解答が無効となることがあります。また、消しくずを残さないでください。
4. 解答用紙を折り曲げたり、切り離したり、汚したりしないでください。また、マーク解答用紙を記述解答用紙の下敷きに使用しないでください。
5. 解答用紙には、必ず受験番号と氏名を記入・マークしてください。未記入や記入・マークミスなどがあつた場合は、当該科目の解答は無効になります。
6. 満点が100点となる配点表示になっていますが、数学科は満点が200点であり、各問の配点は2倍となります。

(設問は 2 ページより始まる)

I 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

a を1以上の実数、 b を実数とし、関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を以下で定める。

$$f(x) = -|2|x| - 1|, \quad g(x) = ax + b, \quad h(x) = e^x$$

ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) すべての実数 x に対し $f(x) \leq g(x)$ が成り立つ (a, b) の範囲は、条件 $a \geq 1$ の下では、 $b \geq 1$ のとき $a \leq \boxed{\text{ア}}$ であり、 $\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ のとき $a \leq \boxed{\text{イ}}$ である。 $b < \frac{1}{2}$ のとき条件を満たす a は存在しない。
- (2) 実数 p に対し、 $x = p$ における $y = h(x)$ の接線の方程式は $y = \boxed{\text{ウ}}$ である。したがって $a = e^p$ のとき、すべての実数 x に対し $g(x) \leq h(x)$ が成り立つのは $b \leq \boxed{\text{エ}}$ のときであり、これは a と b の関係として $b \leq \boxed{\text{オ}}$ と表される。
- (3) すべての実数 x に対し $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ が成り立つような (a, b) 全体のなす領域を D とする。 D における a の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ である。また、 D の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

問題Ⅰのア、イの解答群

- (a) 1 (b) $\frac{3}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{5}{2}$ (e) 3
(f) b (g) $\frac{3}{2}b$ (h) $2b$ (i) $\frac{5}{2}b$ (j) $3b$

問題Ⅰのウの解答群

- (a) $e^p x + p$ (b) $e^p x + p + 1$ (c) $e^p x + p - 1$
(d) $e^p x - p + 1$ (e) $e^p x - p - 1$ (f) $e^p x + (p + 1)e^p$
(g) $e^p x + (p - 1)e^p$ (h) $e^p x + (-p + 1)e^p$ (i) $e^p x - (p + 1)e^p$

問題Ⅰのエの解答群

- (a) p (b) $p + 1$ (c) $p - 1$
(d) $-p + 1$ (e) $-p - 1$ (f) $(p + 1)e^p$
(g) $(p - 1)e^p$ (h) $(-p + 1)e^p$ (i) $-(p + 1)e^p$

問題Ⅰのオの解答群

- (a) $\log a$ (b) $1 + \log a$ (c) $-1 + \log a$
(d) $1 - \log a$ (e) $-1 - \log a$ (f) $a(1 + \log a)$
(g) $a(-1 + \log a)$ (h) $a(1 - \log a)$ (i) $-a(1 + \log a)$

問題Ⅰのカの解答群

- (a) $\frac{1}{e^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ (c) $\sqrt{e}$ (d) $2\sqrt{e}$ (e) e (f) $2e$ (g) e^2

問題Ⅰのキの解答群

- (a) $\frac{e-2}{2}$ (b) $\frac{e-1}{2}$ (c) $\frac{e}{2}$ (d) $\frac{e+1}{2}$ (e) $\frac{e+2}{2}$
(f) $\frac{e-2}{4}$ (g) $\frac{e-1}{4}$ (h) $\frac{e}{4}$ (i) $\frac{e+1}{4}$ (j) $\frac{e+2}{4}$

(設問は次のページにつづく)

II 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマーク解答用紙にマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。(20点)

n を3以上の整数とする。 $1, 2, \dots, n$ の数がひとつずつ書かれた n 枚のカードがある。これらをよく混ぜて一枚のカードを引き、そこに書かれた数を X とする。そのカードを元に戻し、よく混ぜてからもう一度一枚のカードを引き、そこに書かれた数を Y とする。このとき $X - Y$ が3の倍数である確率を $p(n)$ 、 $X - Y - 1$ が3の倍数である確率を $q(n)$ 、 $X - Y + 1$ が3の倍数である確率を $r(n)$ とする。

(1) $q(3) = \boxed{\text{ク}}$ である。

(2) $r(n)$ は $q(n)$ を用いて $r(n) = \boxed{\text{ケ}}$ と表せる。

等式 $p(n) + q(n) + r(n) = 1$ と (2) から、 $p(n)$ を求めれば $q(n)$ と $r(n)$ も求まる。そこで、 $p(n)$ について考察する。

(3) n が3の倍数であるとき、 $p(n) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ が成り立つ。

(4) $n - 1$ が3の倍数であるとき、 $p(n) = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ が成り立つ。

(5) $n - 2$ が3の倍数であるとき、 $p(n) = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ が成り立つ。

問題 II のクの解答群

- Ⓐ 0 Ⓑ $\frac{1}{9}$ Ⓒ $\frac{2}{9}$ Ⓓ $\frac{1}{3}$ Ⓔ $\frac{4}{9}$ Ⓕ $\frac{5}{9}$ Ⓖ $\frac{2}{3}$ Ⓗ $\frac{7}{9}$ Ⓙ $\frac{8}{9}$ ⓵ 1

問題 II のケの解答群

- Ⓐ $q(n)$ Ⓑ $2q(n)$ Ⓒ $\frac{1}{2}q(n)$
Ⓓ $1 - q(n)$ Ⓔ $1 - 2q(n)$ Ⓕ $2 - q(n)$
Ⓖ $\frac{1}{2}(1 - q(n))$ Ⓗ $\frac{1}{2}(1 - 2q(n))$ Ⓙ $\frac{1}{2}(2 - q(n))$

問題 II のコ, シ, セの解答群

- Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 8 Ⓔ 16
Ⓕ $n - 2$ Ⓖ $n - 1$ Ⓗ $n + 1$ Ⓙ $n + 2$ ⓵ $n + 3$
⓷ $n^2 - 2$ ⓰ $n^2 - 1$ ⓴ $n^2 + 1$ ⓶ $n^2 + 2$ ⓸ $n^2 + 3$

問題 II のサ, ス, ソの解答群

- Ⓐ 3 Ⓑ 5 Ⓒ 7 Ⓓ 9 Ⓔ n^2
Ⓕ $3n - 2$ Ⓖ $3n - 1$ Ⓗ $3n$ Ⓙ $3n + 1$ ⓵ $3n + 2$
⓷ $3n^2 - 2$ ⓰ $3n^2 - 1$ ⓴ $3n^2$ ⓶ $3n^2 + 1$ ⓸ $3n^2 + 2$

(設問は次のページにつづく)

III 関数 $f(x)$, $g(x)$ と $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し $s_n(x) = f(x)^n + g(x)^n$ とおき, さらに

$$s_1(x) = x, \quad s_2(x) = x^2 + 2$$

が成り立つとする。以下の問いに答えよ。(30 点)

- (1) $f(x)g(x)$ と $s_3(x)$ を求めよ。
- (2) $s_{n+2}(x)$ を $s_n(x)$ と $s_{n+1}(x)$ を用いて表せ。
- (3) $s_n(x)$ の $x = 0$ における値 $s_n(0)$ と微分係数 $s'_n(0)$ を求めよ。

(設問は次のページにつづく)

IV $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ とおく。また, $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$ とする。以下の問いに答えよ。(30 点)

(1) $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$ を示せ。

(2) $nI_n I_{n-1}$ を求めよ。

(3) $I_{n+1} < I_n$ を示せ。

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n^2$ を求めよ。

(以下計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

1

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

(計算用紙)

